

エネルギー法を用いた境界要素法による応力拡大係数の解析* (二次元き裂問題に対する適用)

宮崎 則 幸^{*1}, 池田 徹^{*2}
金子 秀 明^{*3}, 宗 像 健^{*1}

Analysis of the Stress Intensity Factor Using the Energy Method Combined with the Boundary Element Method (Application to two-dimensional Crack Problems)

Noriyuki MIYAZAKI, Toru IKEDA,
Hideaki KANEKO, and Tsuyoshi MUNAKATA

The energy method combined with the boundary element method is used to obtain the stress intensity factors of two-dimensional crack problems. The analyses are performed to examine the factors affecting the accuracy of solutions, that is, the method for crack extension, the value of crack extension and the type of element. It is shown from the analyses that the linear boundary element gives accurate solutions when the node at the crack tip is released by changing its boundary conditions. Then, the method proposed here is applied to center cracked plates subjected to tension and compact tension specimens to show the effectiveness of the present method.

Key Words: Fracture, Energy Method, Boundary Element Method, Stress Intensity Factor, Crack Extension

1. 緒 言

応力拡大係数(以降 K 値と呼ぶ)は構造物の疲労および脆性破壊と関連して重要であり,これを求めるために種々の方法が用いられている。任意の境界を有する構造物の K 値を解析的手法で求めるのは一般に困難であり,数値応力解析手法が用いられる。この中で有限要素法(FEM)が広く用いられている。これにより K 値を求める方法も種々提案されている⁽¹⁾が,その中で方法が簡便であり既存の有限要素法解析プログラムに容易に組み込むことができる点,および K 値の精度からエネルギー法の一つである仮想き裂進展法⁽²⁾⁽³⁾が優れていると思われる。この方法は二次元き裂問題だけでなく三次元き裂問題にも適用され成功を収めている⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

近年,境界要素法(BEM)が有限要素法と並んで構造物の数値応力解析の手法として用いられることが多くなり, K 値解析への適用も多数見られる。境界要素

法により K 値を求める手法としては,結城⁽⁶⁾がレビューしているように,変位・応力の外挿法,およびこれを改善した接続外挿法,あるいは比例応力・変位法等が有力な手法と考えられている。しかし,変位・応力の外挿法および接続外挿法では,外挿に使用するデータに任意性が残る。すなわち,き裂端に近い節点での変位あるいは応力値を用いると K 値の精度が落ちる可能性がある。また,比例応力・変位法では, K 値が既知の基準問題についてあらかじめ解析を行っておく必要がある点が煩雑である。

有限要素解析と組合せて用いられる仮想き裂進展法においては1回の有限要素解析でエネルギー解放率を算出でき,それから K 値を求めることができる。しかし境界要素法による K 値解析では,このように洗練されたエネルギー法を用いることはできない。したがって,エネルギー解放率を算出するために,微小き裂進展前後の2回の解析が必要となるため,有限要素法では広く用いられているエネルギー法が,境界要素法による K 値解析ではあまり顧みられていないようである。多数ある境界要素法による K 値解析のうちでエネルギー法を用いているのは,三次元構造物中のき裂を扱った Cruse-Meyer の解析⁽⁷⁾, Tan-Fenner の解析⁽⁸⁾⁽⁹⁾があるのみである。彼らの解析は,三次元構造物

* 昭和 62 年 4 月 3 日 第 64 期通常総会講演会において講演,原稿受付 昭和 61 年 9 月 22 日。

^{*1} 正員,九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

^{*2} 学生員,九州大学大学院。

^{*3} 准員,三菱重工業(株)高砂研究所(〒676 高砂市荒井町新浜 2-1-1)。

中のき裂の K 値解析という複雑な問題を扱っているが、き裂進展方法、要素の種類、あるいはき裂進展量が K 値に及ぼす影響といった基礎的な事項については検討されていない。

本論文では、エネルギー法を用いた境界要素解析で三次元き裂問題の K 値解析を行うことを念頭におきつつ、二次元き裂問題に立ち帰ってエネルギー法に関連した前述の基礎的事項の検討を行う。また、エネルギー解放率を求めるのに2回の計算が必要となるという、エネルギー法の欠点を克服する方法も示す。

2. 解析方法

2.1 境界要素法の基礎式⁽¹⁰⁾ 二次元線形弾性問題の境界要素法の表示式は物体力を無視すれば、次式のようになる。

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} p^* \Phi d\Gamma \right) u_j = \sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_j} u^* \Phi d\Gamma \right) p_j \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで i は境界上の任意の節点、 n は境界要素数、 u_j 、 p_j は境界上の要素 j の節点変位および表面力から成るベクトル、 p^* 、 u^* は二次元線形弾性問題に対する Kelvin の基本解を成分とするマトリックス、 c_i は節点 i にかかわる係数マトリックス、 Γ_j は j 要素を表す。さらに Φ は内挿関数マトリックスである。本論文では、境界要素として、一定要素、一次要素、二次要素を用いる。

式(1)をすべての節点について求めることにより、次式のような系全体のマトリックス方程式を得る。

$$HU = GP \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで U 、 P は、全節点の変位、表面力から成るベクトルであり、 H 、 G はそれらにかかわる係数マトリックスである。式(2)に適当な境界条件を導入して解けば、境界上の変位、表面力が求められる。

2.2 エネルギー法⁽¹¹⁾ エネルギー法による K 値の算出においては、まず微小き裂長さ Δa だけ異なる体系について解析を行い、エネルギー解放率 G を求める。この値より、 K_I は次式で求められる。

$$K_I = \sqrt{E'G}, \quad E' = E (\text{平面応力}), \quad E' = E/(1-\nu^2) (\text{平面ひずみ}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで E は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

なお G の計算には、外力一定の条件で成り立つ次式を用いるのが簡単である。

$$G = \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{ex}}{\partial a} \right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 W はひずみエネルギー、 U_{ex} は外力の仕事、

a はき裂長さである。すなわち、外力を一定に保持した状態で、き裂を Δa だけ微小進展させ、そのときの外力の仕事の変化 U_{ex} を荷重点での変位の変化から求めれば式(4)により G が求められる。

2.3 各種のき裂進展法 図1にき裂端近くの応力と変位について、(a)弾性理論による結果と(b)BEMによる結果について模式的に示す。

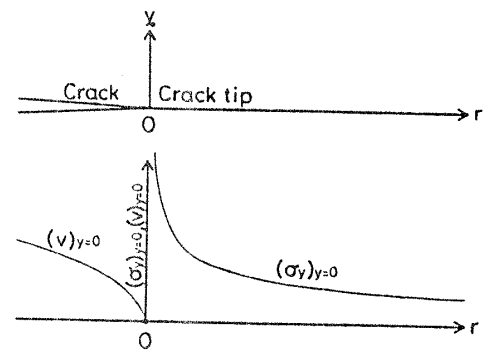
図1よりわかるとおり、BEMによる解析はき裂先端の応力が有限となるため、弾性理論による結果とはかなり異なった形になっている。よってBEMによる解析をエネルギー法に適用するにあたっては、き裂進展前後におけるき裂先端付近の応力と変位の内挿近似の状態に十分注意する必要がある。以下に G を算出するために考えられるき裂進展法を示す。

2.3.1 き裂先端の一節点のみを移動する方法

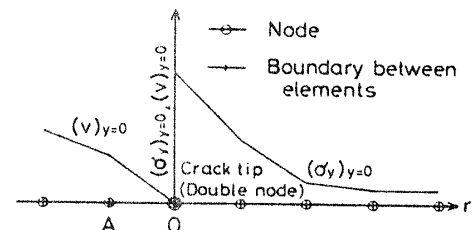
図1(b)の点Oにある節点を r の方向に移動させることによりき裂を進展させる方法について考える。

き裂進展後の応力と変位のBEMによる解析結果を模式的に示すと図2のようになる。ここで図1(b)の点A、Oに点A'、O'が対応している。この場合、 $\overline{OO'}$ をき裂進展量として、き裂進展前後の外力の仕事から G を求めることができる。

しかしながら、図2のようにき裂先端前方の要素長さを短くするとO'点の応力値が上昇し、応力の分布



(a) 弾性理論による結果



(b) BEMによる結果 (一次要素)

$[(\sigma_y)_{y=0} : r \text{ 軸上の垂直応力}]$
 $[(v)_{y=0} : r \text{ 軸上の垂直変位}]$

図1 き裂先端付近の応力と変位の分布

形状が大きく変化する。したがって、この応力分布の変化が荷重点変位に影響を与え、き裂進展に伴う外力の仕事に影響を与えることが考えられる。

2・3・2 き裂先端の両側の要素の形状を変化させずにき裂を進展させる方法 き裂先端の節点とその両側の節点を平行移動することにより、き裂先端の両側の要素形状を変えずにき裂を進展させる方法について考える。この方法では、き裂進展前後におけるき裂先端近傍の応力と変位の分布はほぼ相似であるため、前項で述べたような応力の分布形状の変化がき裂進展における外力の仕事に与える影響は非常に小さくなると考えられる。またこの方法では、次のような理由のために特にき裂先端に二重節点を用いてき裂先端における境界条件の不連続性を補う必要はないと思われる。

あらかじめ K_I 値が求められている体系について BEM によって解析を行い、き裂先端近傍の応力と変位の解析結果を、 K_I 値より弾性理論の結果を用いて求めたものとともにプロットする。き裂先端に単節点を用いて解析した場合、弾性理論の解との一致はあまりよくないが、弾性理論の解を r 軸の負の方向に平行移動させ、弾性理論の解のき裂先端が BEM による解析のき裂先端のわずかに後方にくるようにすると両者の応力と変位の分布がよく一致する点があることが数値実験の結果確かめられた。図 3 は、後で図 6 に示すような中央き裂をもつ板について、 $W=10\text{ mm}$, $a=5\text{ mm}$, $\sigma_0=9.81\text{ MPa}$, $E=1.96\times 10^5\text{ MPa}$, $\nu=0.3$ で平面応力解析を行い、そのき裂先端近傍の応力と変位の分布を(実線)、この体系について求められている K_I 値⁽¹²⁾より弾性理論による結果から求めたもの(破線)と比較した例である。

このことより、き裂先端に単節点を用いた場合の BEM 解析においては、一次要素を用いた場合、き裂長さがわずかに短い体系をよく近似していると考えられる。

図 4 にき裂先端に単節点を用いた場合のき裂進展前後のき裂先端近傍の応力と変位の分布を模式的に示し

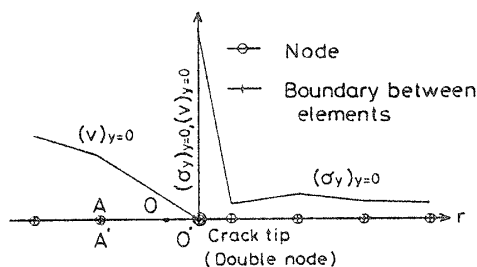


図 2 き裂進展後のき裂先端近傍の応力と変位の分布 (き裂先端の一節点を移動した場合)

た。ここで、 C, C' は解析が最もよく近似していると考えられるき裂の先端である。このき裂先端の後退した長さ $\overline{OC}$ および $\overline{O'C'}$ は、き裂先端近傍の応力と変位の分布状態によって決まると考えられる。図 4 においてはき裂先端の両側の要素の形状が変化していないため、き裂進展前後のき裂近傍の応力と変位の分布はほぼ等しいと思われる。このため、図 4 の(a), (b)においては $\overline{OC} \cong \overline{O'C'}$ が成り立つと考えられる。よって、 $\overline{CC'} \cong \overline{OO'}$ となり、 $\overline{OO'}$ をき裂進展量にとって解析することにより正しい K_I 値が解析できると考えられる。

2・3・3 節点の位置は変化させずにき裂先端の節点の境界条件のみを変化させてき裂を進展させる方法 図 4 (a) の点 O の節点の境界条件を自由表面にすることによりき裂を進展させる方法について考える。

き裂進展後の応力と変位の BEM による解析結果を模式的に示すと図 5 のようになる。ここであらかじめ

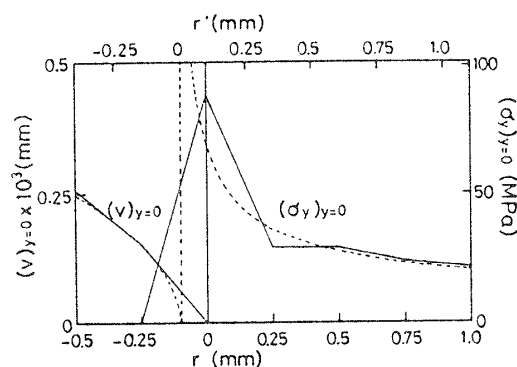
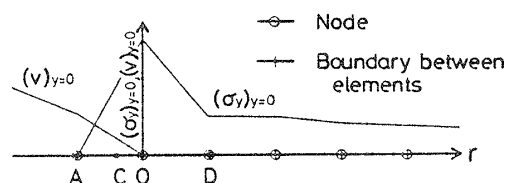
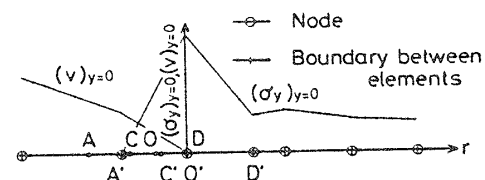


図 3 BEM と弾性理論による結果の比較



(a) き裂進展前



(b) き裂進展後

図 4 き裂進展後のき裂先端近傍の応力と変位の分布 (き裂先端の両側の要素の形状を変化させずにき裂を進展させた場合)

$\overline{AO}=\overline{OD}$ となるように要素をとっておけば、 $2\cdot3\cdot2$ 項の場合と同様に $\overline{CC'}\cong\overline{OO'}$ が成り立つ、したがって、この場合のき裂進展量は $\overline{OD}$ にとってよいことになる。

また、この方法ではき裂の進展前後において節点の位置が全く変化していないので、式(2)の係数マトリックス H, G はき裂進展前後において全く同じである。したがって、この方法を用いれば BEM において最も演算時間を消費している係数マトリックスを求めるための境界積分操作を1回行うだけでよいことになる。さらに残りの演算時間のほとんどを消費している連立一次方程式の解法についても、下記のような方法を用いることにより、ほぼ1回と同じ演算時間で計算を行うことができるようになる。

式(2)を境界条件に注意して次式のように書き直す、

$$[H_1^* \bar{H}_2 H_3] \begin{Bmatrix} U_1^* \\ \bar{U}_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = [G_1^* G_2 \bar{G}_3] \begin{Bmatrix} P_1^* \\ P_2 \\ \bar{P}_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで $U_1^*, \bar{U}_2, U_3$ は、式(2)中の全節点における変位より成るベクトル U のうちで、き裂の進展前後で境界条件が変化するもの、既知であるもの、および未知であるものより成る部分ベクトルをそれぞれ表す。さらに $H_1^*, \bar{H}_2, H_3$ は式(2)における係数マトリックス H のうち、それぞれ $U_1^*, \bar{U}_2, U_3$ にかかわる係数によって構成される部分マトリックスを表している。また $P_1^*, \bar{P}_3, P_2, G_1^*, \bar{G}_3, G_2$ は、式(2)中の全節点における表面力より成るベクトル P とそれにかかわる係数マトリックス G のうち、上記の $U_1^*, \bar{U}_2, U_3, G_1^*, \bar{G}_3, G_2$ と同様な意味をもつ部分ベクトルと部分マトリックスである。式(3)では、き裂進展前においては、 $U_1^*=0, P_1^*$ は未知であり、き裂進展後においては、 U_1^* は未知、 $P_1^*=0$ であることに注意して整理すると、き裂進展前後についてそれぞれ次式を得る。

[き裂進展前]

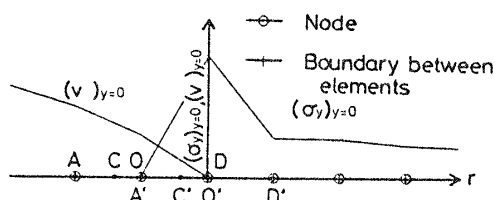


図5 き裂進展後のき裂先端近傍の応力と変位の分布
(き裂先端の節点の境界条件のみを変化させて、き裂を進展させた場合)

$$[G_2 - H_3 G_1^*] \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_3 \\ P_1^* \end{Bmatrix} = [\bar{H}_2 - \bar{G}_3] \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{P}_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(4)$$

[き裂進展後]

$$[G_2 - H_3 - H_1^*] \begin{Bmatrix} P_2 \\ U_3 \\ U_1^* \end{Bmatrix} = [\bar{H}_2 - \bar{G}_3] \begin{Bmatrix} \bar{U}_2 \\ \bar{P}_3 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots(5)$$

式(4)と式(5)を比較すると右辺については全く同じであり、左辺の $G_1^* P_1^*$ と $-H_1^* U_1^*$ の部分のみが異なっている。このことは、式(4)、(5)を解くにあたってガウスの消去法を用いる場合、前進消去の段階で左辺の係数の G_1^* と $-H_1^*$ の部分のみが異なった変化を示している。したがって式(4)、(5)を解くにあたっては両者を別々に解く必要はなく、式(4)を前進消去するときに式(5)の左辺の $-H_1^*$ についてのみ同時に前進消去を行い、後退代入を別々に行うことにより両者の解が一度に得られる。大規模な連立一次方程式を解くにあたってはその手数の大部分は前進消去にあるため H^* が H に対して十分に小さければ、1回と少しの演算時間で式(4)、(5)の解が得られる。

3. 解析結果および考察

3・1 き裂進展の方法による影響 図6(a)に示すような中央き裂をもつ板の引張りについて、 $2\cdot3$ 節で示した各種のき裂進展法を用いて応力拡大係数の解析を行い、その結果を $F_I (=K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a})$ という無次元化した形で表1に示す。なお、解析にあたっては、一次要素を用い、 $a/W=0.5$ とした。境界要素分割の一例を図6(b)に示す。また、解の精度を評価するために石田の解析結果⁽¹²⁾を参照解とした。

3・1・1 き裂先端の一節点のみを移動する方法

$2\cdot3\cdot1$ 項に示した方法による解析結果を表1のNo.1に示す。この結果は石田の解よりかなり大きい・このことは $2\cdot3\cdot1$ 項で述べたようにき裂先端近傍の応力分布がき裂進展前後で変化しているためと思われる。

3・1・2 き裂先端の両側の要素の形状を変化させずにき裂を進展させる方法 $2\cdot3\cdot2$ に示した方法により解析した結果のうち、き裂先端に二重節点を用いた結果をNo.2-1に、単節点を用いた結果をNo.2-2に示す。両者とも1%以内のよい精度であり、き裂進展前後のき裂先端の応力や変位の分布が変化しないように注意することが、正確な K_I 値の解析に重要なこと

を裏づけている。また No. 2-1, No. 2-2 の両者の解の精度に差がないことから、エネルギー法を適用する場合にき裂先端の節点に二重節点を置く必要性はないものと思われる。

3・1・3 節点の位置を変化させずにき裂先端の節点の境界条件のみを変化させて、き裂を進展させる方法
2・3・3 項に示した方法による解析結果を表 1 の No. 3 に示す。また、この方法では、1 回 $+a$ の演算時間でき裂進展前後の応力解析を行うことを述べた。表 2 にこの場合の演算時間と通常の 1 回の解析に要する演算時間との比較を示す。

表 1 より、本方法による解析結果は前項の例と同様に石田の解とよく一致していることがわかる。また、表 2 より、本方法の演算時間は、通常の 1 回の応力解析に対して全体で 3.5 % の増加に留まっており、 $+a$ の大きさは全体からみればほとんど問題にならないものであることがわかる。

以上、三つのき裂進展方法について検討したが、この結果から、第 3 項の節点の境界条件のみを変える方法が、解の精度、演算時間の点から判断して最もよい方法であると考えられる。

3・2 要素の種類とき裂進展量の影響 3・1 節で解析したものと同じ体系で、一定要素、一次要素、二

次要素を用いて解析を行った。なお、き裂進展方法は、3・1 節でよい結果を与えている 3 項の節点の境界条件のみを変化させる方法を用いた。それぞれの要素についてき裂進展量 Δa を変化させて解析を行い、 $\Delta a/a$ の値による解の精度の変化を図 7 に示す。この図の縦軸には、石田の解⁽¹²⁾ F_1^* を基準とした相対偏差をとった。

図 7 より、一次要素は $\Delta a/a$ の広い範囲にわたって相対偏差 1 % 以内の精度を与えていることがわかる。これに対して、一定要素、二次要素では $\Delta a/a$ が大きくなると満足な精度が得られていない。また二次要素では、 x 軸上での変位の適合条件を乱さないようにするために、端節点と中央節点の二つを同時に切り離した。

図 7 の結果より、エネルギー法を用いる場合には一次要素を用いることで十分であると思われる。

3・3 各種問題に対する適用 3・1, 3・2 節において、BEM 解析結果にエネルギー法を用いる二次元き裂問題の K 値解析においては、一次要素を用い、き裂端の一節点の境界条件を変えることによりき裂を進展させる方法が、解の精度や演算時間の点で優れていることを引張りを受ける中央き裂を持つ平板の引張りについて $a/W=0.5$ の場合について示した。ここではこの手法を他の解析対象に適用した例について示す。なお図 7 より、1 % 以内の精度の解を得るには、き裂進展量 $\Delta a/a$ を 0.1 以下にすればよいという目安が得ら

表 1 き裂進展の方法と解析結果

No.	Crack extension length $\Delta a/a$	Solution by BEM F_1	Relative error
1	0.025	1.350	+9.60%
2-1	0.025	1.323	-0.84%
2-2	0.025	1.324	-0.78%
3	0.05	1.338	+0.37%

$$\text{Relative error} = \{(F_1 - F_1^*)/F_1^*\} \times 100 [\%]$$

$$F_1^* = 1.334 (\text{石田の解}^{(12)})$$

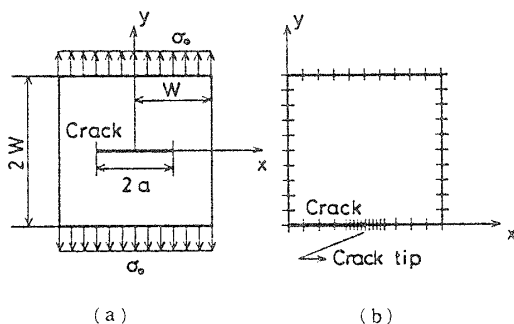


図 6 中央き裂をもつ板の体系図と要素分割例

表 2 き裂進展前後の応力解析を 1 回の計算で行う方法の演算時間

CPU time for all (except printing) (ms)			CPU time for Gaussian elimination (ms)		
T*	T	Inc. rate	T*	T	Inc. rate
997	1032	3.5%	185	207	11.9%

T*: 通常の 1 回の応力解析における演算時間
T: き裂進展前後の応力解析を 1 回の計算で行う本方法の演算時間

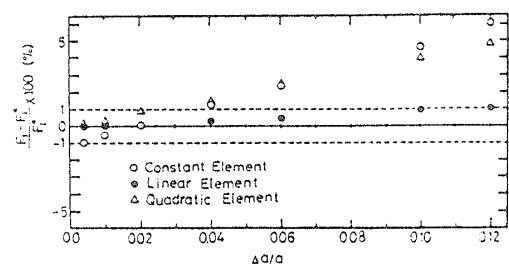


図 7 要素の種類とき裂進展量の影響

れた。そこで以下に示す解析では、すべて $\Delta a/a=0.05$ とした。

3・3・1 引張りを受ける中央き裂を持つ平板 3・1節においては、図6で $a/W=0.5$ の場合のみを解析した。ここでは他のき裂長さの場合も解析して、石田の解⁽¹²⁾と比較して図8に示す。いずれの場合も石田の解からの偏差は1%以内でおさまっている。

3・3・2 コンパクト引張試験片 図9(a)に示すようなコンパクト引張試験片について K_I 値を求めた。この場合には集中力が作用するので、これをBEMで解析するには等価な分布力に置き換える必要がある。ここでは図10に示すような三角形形状の分布力で

集中力を近似した。三角形の面積 αT を集中力 P に等しくとり、 α を十分小さくすれば、このような分布力で集中力を近似できる。数値実験の結果、三角形の底辺 2α の大きさを集中力が作用している辺の0.5~2.0%程度にとれば十分な精度が得られることがわかったので、本解析では、 $2\alpha/H$ が0.83%となるようにした。図9(b)に境界要素分割の一例を示す。

解析は a/W を5とおり変えて行い、次のような近似解⁽¹³⁾と比較して図11に示す。

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{a} F^*(\xi)$$

$$F^*(\xi) = 29.6 - 185.5\xi + 655.7\xi^2 - 1017.0\xi^3 + 638.9\xi^4$$

$$\sigma_0 = P/W \quad (P: \text{単位厚さの力}), \quad \xi = a/W$$

上記の近似解の精度は、 $0.3 \leq \xi \leq 0.7$ で0.5%以下の誤差である。

図11より、 $a/W=0.3$ のときに近似解からの相対偏差が1%を超えているが、その他の場合では1%以内となっていることがわかる。

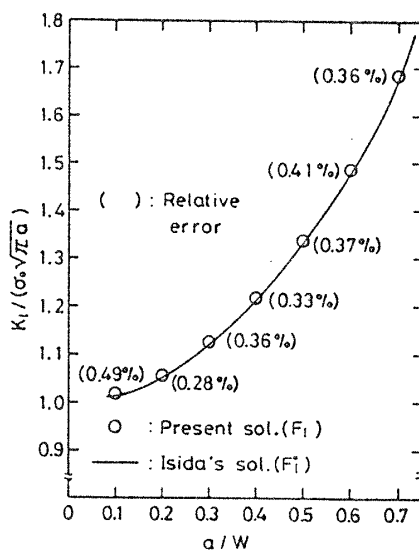


図8 引張りを受ける中央き裂を持つ平板における K_I 値の解析結果

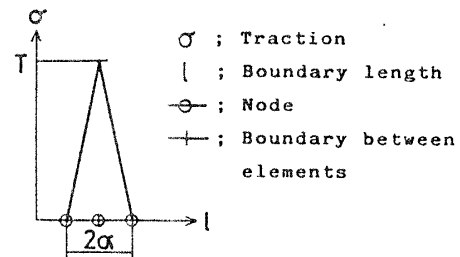


図10 集中力の分布力による近似

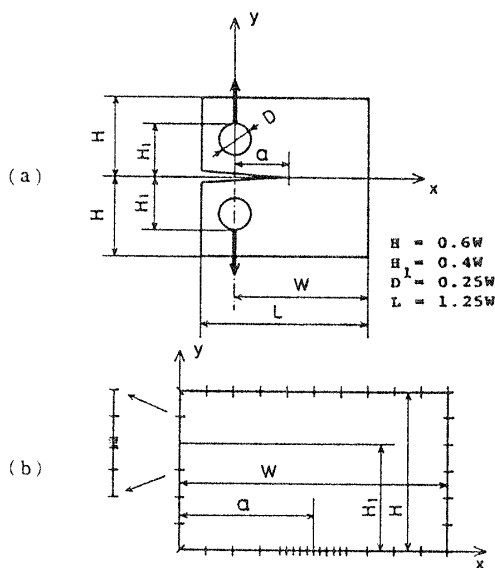


図9 コンパクト引張試験片の体系図と要素分割例

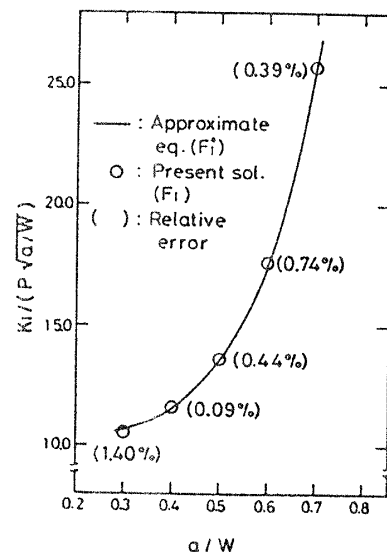


図11 コンパクト引張試験片の K_I 値の解析結果

4. 結 言

本報では、境界要素法解析結果にエネルギー法を適用して応力拡大係数を求めることに関連した基礎的な事項を二次元き裂問題により検討した。すなわち、き裂進展方法、要素の種類、き裂進展量が解の精度に及ぼす影響を検討した。本報で得られた結論を以下に示す。

(1) き裂進展方法としては、節点の位置は変化させずに、き裂端の節点の境界条件を変化させる方法が、解の精度、演算時間の点から推奨される。本法によれば、計算時間について通常の1回の解析に要する演算時間とほとんど同じ演算時間で解を求めることができる。

(2) 要素の種類については、一定要素、一次要素、二次要素のうち、一次要素を用いることが推奨される。すなわち、この要素は他の要素に比べて広い範囲のき裂進展量に対して高い精度の解を与える。

(3) き裂進展量 Δa は、一次要素を用い、(1)の節点の境界条件を変化させる方法でき裂を進展させた場合に、 $\Delta a/a \leq 0.1$ にとれば、ほぼ1%以内の精度で応力拡大係数が求まることが期待できる。

以上のことより、エネルギー法では混合モードの K 値を求めることはできなという弱点はあるものの、単

一モードの問題では高い精度の解を与えることがわかった。なお、本報では二次元き裂の問題しか扱っていないが、これを三次元き裂の K 値解析に拡張することも可能である。三次元き裂問題に対するエネルギー法の適用については、次報以降で取扱う予定である。

最後に、本研究の計算には九州大学大型計算機センターの FACOM M-382 を用いたことを付記する。

文 献

- (1) Gallagher, R. H., *Proc. 1st Int. Conf. Num. Meth. Fract. Mech.*, (1978), 1.
- (2) Parks, D. M., *Int. J. Fract.*, 10-4 (1974), 485.
- (3) Hellen, T. K., *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 9-1 (1975), 187.
- (4) Reynen, J., *Trans. ASME, J. Press. Vessel Technol.*, 98-1 (1976), 88.
- (5) 宮崎・ほか3名, 機論, 480-430 A (昭57), 739.
- (6) 結城, 第596回機習教, (昭60), 15.
- (7) Cruse, T. A. and Mayers, J. G., *Proc. Am. Soc. Civ. Eng., J. Struct., Div.*, 103 (1977), 307.
- (8) Tan, C. L. and Fenner, R. T., *Proc. R., Soc., Ser. A*, 369 (1979), 243.
- (9) Tan, C. L. and Fenner, R. T., *Int. J. Fract.*, 16-3 (1980), 223.
- (10) Brebbia, C. A., ほか2名, "Boundary Element Techniques", (1984), 177, Springer-Verlag
- (11) 岡村, 「線形破壊力学入門」, (昭51), 49, 培風館.
- (12) Isida, M., *Int. J. Fract. Mech.*, 7-3 (1971), 301.
- (13) Tada, H., ほか2名, "The Stress Analysis of Cracks Handbook", (1973), 2.20, Del Research Corp.

討 論

〔質問〕 田中正隆〔信州大学工学部〕

境界要素法による K 値の解析法としては、貴論文で言及している変位・応力外挿法や比例応力・変位法のほかに、き裂先端近傍での特性を考慮したき裂要素を用いる方法(付1)(付2)が提案されている。そして、これらを単独で用いるかまたはき裂要素法と比例応力・変位法を併用することにより、ほとんどの場合 K 値を精度よく求めることができるようになっている。また、これらの方法は、どのようなき裂モードの K 値の計算にも適用可能である。このような現状を考えると、貴論文で取扱っているエネルギー法を用いる K 値の計算法がどのような利点を持つのか判断に苦しむところである。 K_I モードばかりでなく、その他のき裂モードへの貴解法の適用のことも含めて、著者のご意見をお聞かせ願いたい。

〔回答〕 境界要素法による K 値の解析では、変位・応力外挿法などの直接法を用いる手法が盛んに研究されており、き裂要素法を用いるような方法により、

精度よく混合モードをも含めて解析が行えることは、ご指摘のとおりである。

これに対して、エネルギー法は、本質的にき裂進展前後の2回の解析が必要となる点から不利であると考えられており、境界要素法においては、あまり研究がなされていない。本論文では、このような現実を踏まえた上で、エネルギー法に関連した基本的な事項の検討を行い、境界要素法によるエネルギー法使用の可能性を探ることを主眼とした。

本法で解析上に任意性の残る所は、き裂進展量 Δa をどの程度に取ればよいかという点であるが、本論文の結果によれば、一次要素を用いれば、広い範囲の

(付1) 田中・伊藤, 機論, 52-480, A (昭61), 1870.

(付2) Tanaka, M. and Itoh, H., *Boundary Elements VIII*, Tanaka, M. and Brebbia, C. A. 編, Springer-Verlag, (1986), 131.

(付3) 宮崎, 機論, No. 878-1 (昭62-3), 27.

(付4) Ishikawa, H., *Int. J. Fract.*, 16 (1980), 243.

Δa の値で解の精度が一定に保たれ、他の方法に比べても、解析上の任意性が少ない方法といえよう。

混合モードへの適用は、本解析では不可能であるため、き裂先端部にのみ必要最低限の有限要素を配して、有限要素法と境界要素法を結合して解析を行い、有限要素に仮想き裂進展法を適用して解くことを考えている(付3)。仮想き裂進展法による混合モードの解析は、

有限要素法においては実現しているため(付4)、このような方法によれば混合モードの解析も可能であると思われる。これにより、少ない自由度により体系を離散化できるという境界要素法の特質と、1回の解析で精度よい K 値を求められ、かつ解析上の任意性が少ない仮想き裂進展法の両方の特質を生かすことが可能となると考えている。