

境界要素法と有限要素法の結合解法による応力拡大係数解析\*  
(二次元き裂問題に対する適用)宮崎 則幸<sup>\*1</sup>, 池田 徹<sup>\*2</sup>, 宗像 健<sup>\*1</sup>Stress Intensity Factor Analysis by Combination of Boundary Element  
and Finite Element Methods  
(Application to Two-Dimensional Crack Problems)

Noriyuki MIYAZAKI, Toru IKEDA, and Tsuyoshi MUNAKATA

A combination of the boundary element method and the finite element method is proposed for calculating the stress intensity factors of two-dimensional crack problems. In this method, finite elements are only allocated near a crack tip and boundary elements are used to discretize the rest of the structure. The virtual crack extension method is applied to the finite elements to obtain the stress intensity factor. The analyses are performed to examine the factors affecting the accuracy of the solution. It is shown from the analyses that we can use large-sized finite elements near the crack tip, and select the crack extension value from the wide range of values.

**Key Words:** Elasticity, Stress Intensity Factor, Boundary Element Method, Finite Element Method, Virtual Crack Extension Method

## 1. 緒 言

応力拡大係数(以降  $K$  値と呼ぶ)は構造物の疲労および脆性破壊と関連して重要であり,これを求めるために種々の方法が用いられている。任意の境界を有する構造物の  $K$  値を解析的手法で求めるのは一般に困難であり,数値応力解析手法が用いられている。この中で有限要素法(FEM)が広く用いられている。これにより  $K$  値を求める方法も種々提案されているが,その中で方法が簡便であり,かつ精度も良好なことからエネルギー法の一つである仮想き裂進展法<sup>(1)(2)</sup>が広く用いられている。この方法は1回の有限要素解析でエネルギー解放率が算定できるだけでなく,解の精度がき裂進展量にあまり影響されないといった優れた特色を持っている。

近年,境界要素法(BEM)が有限要素法と並んで構造物の数値応力解析の手法として用いられることが多くなった。境界要素法により  $K$  値を求める手法としては変位・応力の外挿法,およびこれを改善した接続外

挿法<sup>(3)</sup>,あるいは比例応力・変位法<sup>(4)</sup>等が用いられることが多い。しかし,変位・応力の外挿法および接続外挿法では,外挿に使用するデータに任意性が残る。すなわち,き裂端に近い節点での変位あるいは応力値を用いると  $K$  値の精度が低下する可能性がある。また,比例応力・変位法では,  $K$  値が既知の基準問題についてあらかじめ解析を行っておく必要がある点が煩雑である。エネルギー法を用いた境界要素法による  $K$  値解析も,著者ら<sup>(5)</sup>によって試みられているが,この場合には仮想き裂進展法のような洗練されたエネルギー法を用いることはできず,エネルギー解放率を算定するのに,微小き裂進展前後の2回の解析が原則的に必要となる。

本報では,仮想き裂進展法のもつ前述のような優れた特質を境界要素法に組み込むことを考える。このために,き裂先端のみに有限要素を配置し,その他の部分を境界要素を用いて離散化するというFEMとBEMの結合解法を提案する。さらに,この方法においてき裂端要素寸法,き裂進展量が解の精度に及ぼす影響等の基礎的な検討を二次元き裂問題に対して行う。

## 2. 解 析 方 法

図1に本法の概念図を示す。すなわち,解析領域  $\Omega$

\* 昭和62年3月18日 九州支部第40期総会講演会において講演,原稿受付 昭和63年4月12日。

<sup>\*1</sup> 正員,九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

<sup>\*2</sup> 准員,三菱重工業(株)長崎造船所(〒850-91 長崎市飽の浦町1-1)。

を有限要素で離散化する領域  $\Omega^F$  と境界要素で離散化する領域  $\Omega^B$  に分割し、 $\Omega^F$  と  $\Omega^B$  が接する内部境界を  $\Gamma^I$  とし、領域  $\Omega^F$  は  $\Gamma^F$  と  $\Gamma^I$  で囲まれ、領域  $\Omega^B$  は  $\Gamma^B$  と  $\Gamma^I$  で囲まれているものとする。ただし、 $\Omega^F$  はき裂端  $O$  を囲むように配置するものとする。

仮想き裂進展法を適用する前に、体系の応力解析を行わなければならない。BEM と FEM の結合モデルに対しては、有限要素で離散化した領域  $\Omega^F$  に関する方程式系を境界要素形の方程式に変換する等価境界要素法による解法と、境界要素で離散化した領域  $\Omega^B$  に関する方程式系を有限要素形の方程式に変換する等価有限要素法による解法の二つが考えられる<sup>(6)(7)</sup>。本報では、後者の等価有限要素法による解法を用いた。

領域  $\Omega^B$  に対しては次のような境界要素方程式が成立つ。

$$H \begin{Bmatrix} U_B \\ U_B^I \end{Bmatrix} = G \begin{Bmatrix} P_B \\ P_B^I \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $H, G$  は係数マトリックス、 $U_B, P_B$  は境界  $\Gamma^B$  上での節点変位ベクトル、節点表面力ベクトル、 $U_B^I, P_B^I$  は内部境界  $\Gamma^I$  上での節点変位ベクトル、節点表面力ベクトルをそれぞれ表す。式(1)に左から  $G^{-1}$  を作用させると、次式を得る。

$$G^{-1}H \begin{Bmatrix} U_B \\ U_B^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_B \\ P_B^I \end{Bmatrix} \quad (2)$$

さらに、節点表面力ベクトルを節点力ベクトルに変換するマトリックス  $M^{(6)(7)}$  を式(2)の左から作用させると、次式のような有限要素形の方程式が得られる。

$$K_B \begin{Bmatrix} U_B \\ U_B^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_B \\ F_B^I \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ここで

$$K_B = MG^{-1}H \quad (4)$$

$$\begin{Bmatrix} F_B \\ F_B^I \end{Bmatrix} = M \begin{Bmatrix} P_B \\ P_B^I \end{Bmatrix} \quad (5)$$

一方、領域  $\Omega^F$  に対しては、次式のような有限要素平衡方程式が得られる。

$$K_F \begin{Bmatrix} U_F^I \\ U_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_F^I \\ F_F \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 $K_F$  は剛性マトリックス、 $U_F, U_F^I$  は節点変位ベクトル、 $F_F, F_F^I$  は節点荷重ベクトルである。特に、 $U_F^I, F_F^I$  は内部境界  $\Gamma^I$  上の節点量を表している。内部境界  $\Gamma^I$  上での適合条件および平衡条件

$$U_B^I = U_F^I = U^I \quad (7)$$

$$F_B^I + F_F^I = 0 \quad (8)$$

を用いると、式(3)、(6)は次のように一つの式にまとめられる。

$$\begin{bmatrix} K_B^B & K_B^I & 0 \\ 0 & K_F^I & K_F^F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_B \\ U^I \\ U_F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_B \\ 0 \\ F_F \end{Bmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $K_B^B, K_B^I$  は  $K_B$  の部分マトリックス、 $K_F^I, K_F^F$  は  $K_F$  の部分マトリックスである。式(9)を全体剛性マトリックス  $K$ 、全体変位ベクトル  $U$ 、全体荷重ベクトル  $F$  を用いて書き直せば、次式ようになる。

$$KU = F \quad (10)$$

上式を解くことにより、節点変位が求められる。

次に、仮想き裂進展法を適用しよう。体系全体のポテンシャルエネルギー  $\pi$  は

$$\pi = \frac{1}{2} U^T KU - U^T F \quad (11)$$

で与えられる。ここで  $( )^T$  は転置を表す。仮想き裂進展法では、図1で他の節点をそのままの状態に保って、き裂端の節点  $O$  を微小量  $\Delta a$  だけ右へ移動して、き裂を進展させる。いま、外力  $F$  がき裂長さ  $a$  に依存しないとすれば、式(10)、(11)より次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \pi}{\Delta a} &= \frac{1}{2} U^T \frac{\Delta K}{\Delta a} U + \frac{\Delta U^T}{\Delta a} (KU - F) \\ &= \frac{1}{2} U^T \frac{\Delta K}{\Delta a} U \quad (12) \end{aligned}$$

上式は、き裂が  $\Delta a$  だけ進展したときのポテンシャルエネルギーの変化が、そのときの剛性マトリックスの変化から計算できることを示している。いま、き裂進展により剛性マトリックスが変化するのは  $\Omega^F$  領域だけであるので、式(12)は

$$\frac{\Delta \pi}{\Delta a} = \sum_{i=1}^{N_F} \frac{1}{2} u_i^T \frac{\Delta k_i}{\Delta a} u_i \quad (13)$$

となる。ここで、 $N_F$  はき裂端まわりに配置した有限要素数、 $u_i, k_i$  は要素  $i$  の節点変位ベクトルおよび剛性マトリックスをそれぞれ表す。一方、エネルギー解放率  $G$  は

$$G = -\frac{\partial \pi}{\partial a} \quad (14)$$

で与えられるので、式(13)を式(14)に代入すれば

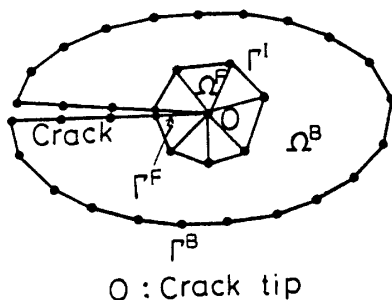


図1 BEM と FEM の結合モデル

$$G = - \sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \frac{\Delta \mathbf{k}_i}{\Delta a} \mathbf{u}_i \quad \dots\dots\dots (15)$$

を得る。すなわち、 $G$  は既知節点変位と、き裂端まわりに配置した有限要素の仮想き裂進展による剛性マトリックスの変化より求められる。エネルギー解放率  $G$  より応力拡大係数  $K_I$  は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= \sqrt{E' G}, \quad E' = E \text{ (平面応力)} \\ E' &= E / (1 - \nu^2) \text{ (平面ひずみ)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 $E$  は縦弾性係数、 $\nu$  はポアソン比である。

### 3. 解析結果および考察

2章に示した BEM と FEM の結合解法を実際の応力拡大係数解析に適用してみよう。まず、き裂端に配置する有限要素の大きさ、き裂進展量の大きさ等の指針を得るために、中央き裂付き帯板の解析を行う。さらに、この解析で得られた指針に基づいてコンパクト引張試験片の解析を行う。

**3・1 中央き裂付き帯板** 解析対象は引張りを受ける中央き裂付き帯板として、図 2 に示すように対称性を考慮して 1/4 領域を離散化した。なお、帯板の縦横比は 2.5、き裂長さは板幅の 1/2 とする。境界要素と

しては 3 節点 2 次補間要素を、有限要素としては 8 節点アイソパラメトリック要素を用いた。解析は図 2 (b) に示すように、次の四つの方法により行った。

**Method 1:** BEM と FEM の結合解法による。ただし、この方法では有限要素の中間節点を移動することにより、き裂端での応力、ひずみの  $1/\sqrt{r}$  の特異性を表しうる特異要素<sup>(8)(9)</sup>をき裂端に配置する。

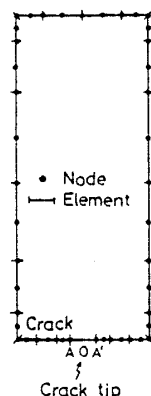
**Method 2:** BEM と FEM の結合解法による。ただし、この方法では通常の有限要素をき裂端に配置する。

**Method 3:** 有限要素形方程式に変換した境界要素法による。すなわち、式 (3) を用いる。

**Method 4:** 通常の境界要素法による。すなわち、式 (1) を用いる。

また、各方法について図 2 (b) に示すように、MP (= Mesh Pattern) 1~4 の 4 種類の要素分割を用いて解析を行った。ここで、 $l$  はき裂端に配置した正方形要素の一辺の長さ、 $a$  は半き裂長を示す。

まず、き裂中央開口変位  $\delta$  を上記の四つの方法で求め、帯板に対する Tada らのハンドブック<sup>(10)</sup>の値  $\delta^*$  と比較した。縦軸に  $\delta$  の  $\delta^*$  からの相対偏差を、横軸にき裂端の要素寸法をとって、図 3 に結果を示す。さらに Method 1, 2 について、仮想き裂進展量  $\Delta a$  を  $\Delta a/a = 10^{-8}$  として、無次元応力拡大係数  $F_I (= K_I/\sigma_\infty\sqrt{\pi a}, \sigma_\infty$ : 作用応力) を求めた。縦軸に帯板に対する石田の解<sup>(11)</sup>  $F_I^*$  からの相対偏差をとり、横軸にき裂端要素の寸法をとって、図 4 に結果を示す。図 3, 4 より、BEM と FEM の結合解法で、き裂端に特異有限要素を配置した Method 1 が最も精度の良い解を与えることがわかる。さらに、Method 1 は解の精度がき裂端の要素寸法にほとんど影響されず、 $l/a = 0.2$  というような大きな要素をき裂端に置いても解の精度が全く低下しないことは注目に値する。



(a) 全体図

|                                              | MP 1<br>( $l/a=0.02$ ) | MP 2<br>( $l/a=0.04$ ) | MP 3<br>( $l/a=0.08$ ) | MP 4<br>( $l/a=0.2$ ) |
|----------------------------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----------------------|
| Method 1<br>(FEM+BEM)<br>Singular<br>Element |                        |                        |                        |                       |
| Method 2<br>(FEM+BEM)<br>Regular<br>Element  |                        |                        |                        |                       |
| Method 3<br>&<br>Method 4                    |                        |                        |                        |                       |

(b) AOA' 部分の詳細図

図 2 中央き裂付き帯板の要素分割図

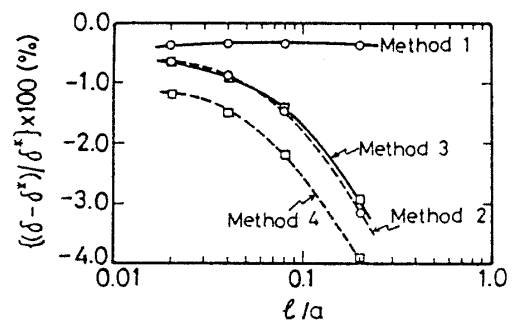


図 3 中央き裂付き帯板のき裂中央開口変位のき裂端要素寸法による変化

本法により応力拡大係数を求める場合に問題となるのは、仮想き裂進展量  $\Delta a$  をどの程度にとるかということである。図5に、MP 4 の場合について、無次元応力拡大係数  $F_I$  の仮想き裂進展量  $\Delta a$  による変化を示す。この図より、 $\Delta a/a$  が  $10^{-4} \sim 10^{-13}$  という広い範囲の  $\Delta a$  に対して解の精度が一定となっていることがわかる。 $\Delta a/a$  が  $10^{-4}$  より大きい場合に解の精度が低下しているが、これは  $\Delta a$  が大きくなると、式(15)中の微分の差分による近似精度が低下することによるものと考えられる。一方、 $\Delta a/a$  が計算機の有効表現けた数

に近い値あるいはそれ以下にとると丸めの誤差のためやはり差分近似の精度が低下すると考えられる。図5で、 $\Delta a/a$  が  $10^{-13}$  より小さい範囲で解の精度が低下しているのは、この理由によるものと思われる。本計算は倍精度 (1 word=64 bits) で行ったが、単精度で計算を行えば、解の精度が低下しはじめる  $\Delta a/a$  の下限値は、 $10^{-13}$  よりも大きくなると考えられる。

**3.2 コンパクト引張試験片** 3.1節の解析結果より、き裂端には特異有限要素を配置し、き裂長さを  $a$  としたとき、その有限要素の寸法  $l$  は  $l/a=0.2$  程度にとれること、および仮想き裂進展量  $\Delta a$  は倍精度計算の場合には、 $\Delta a/a=10^{-4} \sim 10^{-13}$  とすれば良いことがわかった。そこで、これらの指針に基づいて図6に示すようなコンパクト引張試験片の  $K$  値解析を行った。解析は  $a/W$  を 0.3 から 0.7 まで、5通りに変えて行った。図7に  $a/W=0.5$  の場合について、要素分割図を示す。いずれのき裂長さの場合も、き裂端有限要素の寸法  $l/a$  は 0.2 とした。また  $\Delta a/a=10^{-8}$  とした。

図8に本解析結果と次式のような近似解<sup>(12)</sup>との比較を示す。

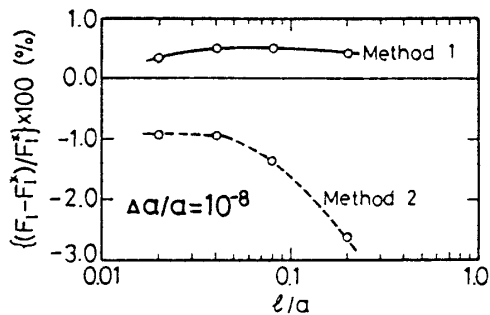


図4 中央き裂付き帯板の無次元応力拡大係数のき裂端要素寸法による変化

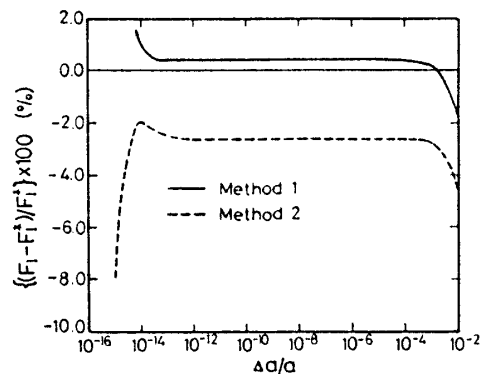


図5 中央き裂付き帯板の無次元応力拡大係数のき裂進展量による変化 (MP 4)

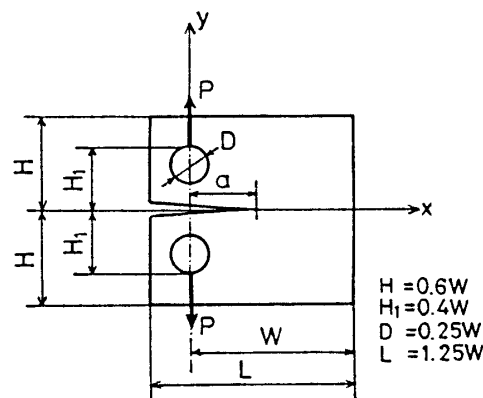


図6 コンパクト引張試験片体系図

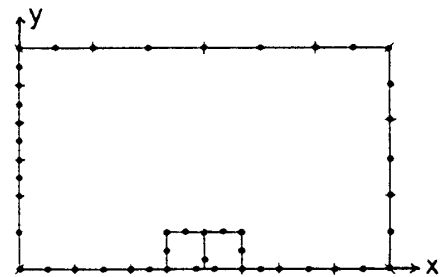


図7 コンパクト引張試験片の要素分割図 ( $a/W=0.5$  の場合)

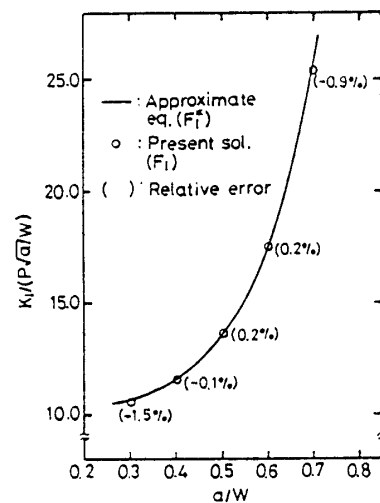


図8 コンパクト引張試験片の  $K_I$  値の解析結果

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{a} F_I^*(\xi)$$

$$F_I^*(\xi) = 29.6 - 185.5\xi + 655.7\xi^2 - 1017.0\xi^3 + 638.9\xi^4$$

$$\sigma_0 = P/W (P: \text{単位厚さの力}), \xi = a/W$$

上式の近似解の精度は、 $0.3 \leq \xi \leq 0.7$  で 0.5% 以下である。

図 8 より、 $a/W = 0.3$  のときに近似解からの相対偏差が 1% を超えているが、その他の場合では 1% 以内となっていることがわかる。

#### 4. 結 言

本報では、き裂先端部に有限要素を配置し、その他の領域を境界要素を用いて離散化し、有限要素領域に仮想き裂進展法を適用して  $K$  値を求めるという解法を提案した。数値解析の結果、得られた結論は次のとおりである。

(1) き裂端に中間節点移動による 8 節点アイソパラメトリック特異要素を配置すれば、き裂端有限要素寸法  $l$  をかなり大きくとっても解の精度は低下しない。本解析結果では  $l/a = 0.2$  としても解の精度の低下は認められない。

(2) 1 word が 64 bits の倍精度計算を行えば、仮想き裂進展量  $\Delta a$  は  $10^{-4}a \sim 10^{-13}a$  の間で選べば良

い。

本解法では、有限要素はき裂端のみに置けばよいので、これによる自由度の増加はわずかである。また、き裂端部の有限要素に仮想き裂進展法が適用できる。したがって、本解法を用いることにより、少ない自由度で体系を離散化できるという BEM の特質と、仮想き裂進展法により 1 回の解析で  $K$  値を求めることができるという FEM の特質を生かすことが可能となる。

#### 文 献

- (1) Parks, D. M., *Int. J. Fract.*, **10** (1974), 485.
- (2) Hellen, T. K., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **9** (1975), 187.
- (3) 北川・ほか 3 名, 機論, **50-450**, A (昭 59), 129.
- (4) 木須・ほか 2 名, 機論, **51-463**, A (昭 60), 660.
- (5) 宮崎・ほか 3 名, 機論, **53-492**, A (昭 62), 1590.
- (6) Brebbia, C. A. and Georgiou, P., *Appl. Math. Modelling*, **3** (1979), 212.
- (7) 田中(正)・田中(道), 境界要素法の基礎, (昭 59), 194, 培風館.
- (8) Henshell, R. D. and Shaw, K. G., 文献(2)の 495 ページ.
- (9) Barsoum, R. S., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **10** (1976), 25.
- (10) Tada, H., ほか 2 名, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, (1973), 2.4, Del Research.
- (11) Isida, M., *Eng. Fract. Mech.*, **5** (1973), 647.
- (12) 文献(10)の 2.20 ページ.