

境界要素法と有限要素法の結合解法による応力拡大係数解析*
(混合モードき裂問題に対する適用)宮崎 則幸^{*1}, 池田 徹^{*2}, 宗像 健^{*1}Stress Intensity Factor Analysis by Combination of Boundary Element and
Finite Element Methods
(Application to Mixed-Mode Crack Problems)

Noriyuki MIYAZAKI, Toru IKEDA, and Tsuyoshi MUNAKATA

A combination of the boundary element method and the finite element method is used to calculate the stress intensity factors of mixed-mode crack problems. In this method, finite elements are only allocated near a crack tip and boundary elements are used to discretize the rest of the structure. The virtual crack extension method is applied to the finite elements to obtain the stress intensity factor, together with the method for the separation of displacement components into Mode I and Mode II. The analyses are performed for a center slant crack or a center arc crack in a rectangular plate subjected to uniform tensile stress. It is found from the analyses that the present method gives an accurate stress intensity factor for mixed mode crack problems.

Key Words: Fracture, Stress Intensity Factor, Mixed Mode Crack, Boundary Element Method, Finite Element Method, Virtual Crack Extension Method

1. 緒 言

応力拡大係数(以降 K 値と呼ぶ)は, 構造物の破壊現象に関連するパラメータとして重要であり, これを求めるために種々の方法が用いられている。任意の境界を有する構造物の K 値を解析的手法で求めるのは一般に困難であり, 数値応力解析手法が用いられている。この中で有限要素法(FEM)が広く用いられている。これにより K 値を求める方法も種々提案されているが, その中で方法が簡便であり, かつ精度も良好なことから仮想き裂進展法⁽¹⁾⁽²⁾が広く用いられている。この方法は1回の有限要素解析でエネルギー解放率が算定できるだけでなく, 離散化誤差の影響を受けにくい高精度解法であるとともに, 解の精度がき裂進展量にあまり影響されないといった優れた特色を持っている。

一方, 境界要素法(BEM)が, 有限要素法と並んで構造物の数値応力解析の手法として用いられることが近年多くなった。この方法は, 有限要素法に比べてデー

タ作成が容易であるという利点がある。

著者らは前報⁽³⁾において, き裂先端部のみに有限要素を配し, その他の部分を境界要素法により離散化するという結合解法を用い, これに仮想き裂進展法を組み込む方法を提案した。これにより少ない自由度によって体系を離散化できるという境界要素法の特質と, 仮想き裂進展法の特色をともに生かすことが可能となった。

前報ではこの結合解法を単一モードの問題のみに適用したが, 本報ではこれを混合モードの問題に適用する。

2. 解 析 方 法

解法の詳細は前報⁽³⁾に詳しく与えられているので, ここではその概要のみを記述する。

図1に境界要素法と有限要素法の結合解法概念図を示す。すなわち, き裂周辺の領域 Ω^F を境界要素で, その他の領域 Ω^B を境界要素で離散化し, これを内部境界 Γ^I での適合条件および平衡条件を考慮して結合する。境界要素法と有限要素法の結合モデルとしては, 境界要素領域の方程式を有限要素形に変換する等価有限要素モデルを用いる。このようにすることにより, 次式のような通常の有限要素形の平衡方程式が得られ

* 平成元年1月24日 第955回講演会において講演, 原稿受付 昭和63年6月21日。

^{*1} 正員, 九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

^{*2} 准員, 三菱重工業(株)長崎造船所(〒850-91 長崎市飽の浦町1-1)。

る。

$$KU=F \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 K は全体の剛性マトリックス、 U と F はそれぞれ全体の変位および荷重ベクトルである。

次に、仮想き裂進展法を考える。図1で他の節点をそのままの状態に保って、き裂端の節点 O を微小量 Δa だけ右方へ移してき裂を進展させる。いま外力 F がき裂長さ a に依存しないと考えると、エネルギー解放率 G は最終的に次式で与えられる。

$$G = -\frac{1}{2} U^T \frac{\Delta K}{\Delta a} U \dots\dots\dots (2)$$

上式は、き裂が Δa だけ進展したときの剛性マトリックスの変化からエネルギー解放率 G が計算できることを示している。いま、き裂進展により剛性マトリックスが変化するのは Ω^F 領域だけであるので、式(2)は

$$G = -\sum_{i=1}^{N_F} \frac{1}{2} u_i^T \frac{\Delta K_i}{\Delta a} u_i \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここで、 N_F はき裂端まわりに配置した有限要素数、 u_i 、 K_i は要素 i の節点変位ベクトルと剛性マトリックスをそれぞれ表す。

石川⁽⁴⁾によって提案された方法により仮想き裂進展法を混合モードき裂問題に適用する。図2に示すようなき裂端付近の点 P の変位 u は、モード I による変位 u^I とモード II による変位 u^{II} に分離できる。すなわち、図2に示すような x_1 軸に関して対称な点 P, P' に

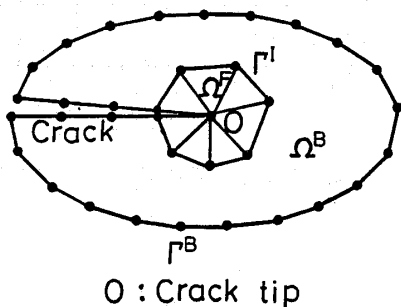


図1 境界要素法と有限要素法の結合モデル

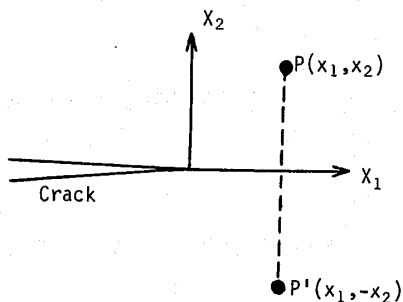


図2 き裂端部での座標系

おける変位をそれぞれ $u = \{u_1, u_2\}$, $u' = \{u'_1, u'_2\}$ とすると、 $u^I = \{u^I_1, u^I_2\}$ および $u^{II} = \{u^{II}_1, u^{II}_2\}$ は次のように表せる。

$$\begin{cases} u^I_1 \\ u^I_2 \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} u_1 + u'_1 \\ u_2 - u'_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} u^{II}_1 \\ u^{II}_2 \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} u_1 - u'_1 \\ u_2 + u'_2 \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

この u^I, u^{II} を用いるとモード I およびモード II のエネルギー解放率 $G_j (j = I, II)$ は次式で与えられる。

$$G_j = -\sum_{i=1}^{N_F} \frac{1}{2} (u^j_i)^T \frac{\Delta K_i}{\Delta a} u^j_i \quad (j = I, II) \dots\dots\dots (5)$$

したがって応力拡大係数 $K_j (j = I, II)$ は次式により求まる。

$$\left. \begin{aligned} K_j^2 &= E' G_j, \quad (j = I, II) \\ E' &= E, \quad (\text{平面応力}) \\ E' &= E/(1-\nu^2), \quad (\text{平面ひずみ}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

3. 解析結果および考察

3.1 中央傾斜き裂を有する平板 ここでは図3に示すような長さ $2a$ の中央傾斜き裂を有する平板が引張荷重をうける場合の解析結果を示す。体系の離散化は図4に示すように、き裂先端部にのみ8節点アイソパラメトリック特異要素を配し、その他の部分には二次の境界要素を用いた。解析結果は無次元化した形 $F_I (= K_I/\sigma_0\sqrt{\pi a})$, $F_{II} (= K_{II}/\sigma_0\sqrt{\pi a})$ で示し、解析値の精度を評価するために北川・結城⁽⁵⁾の選点法による解析結果 F_I^*, F_{II}^* と比較した。

まず、き裂先端部に配置する有限要素寸法 l (図4参照) が解析値に与える影響を調べるために、 $\theta = 45^\circ$,

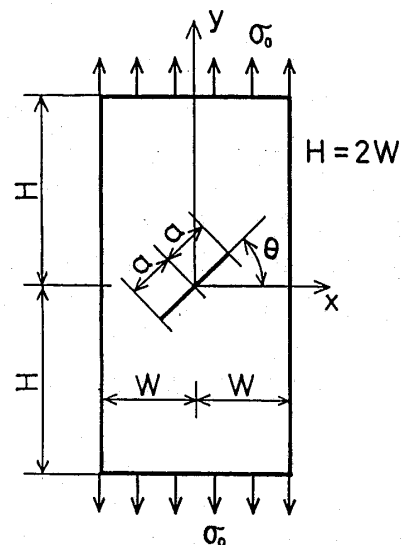
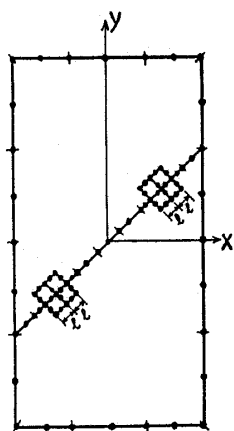


図3 中央傾斜き裂を有する平板

表 1 本解析結果と参照解との比較

a/w		θ					
		30°		45°		60°	
		F_I	F_{II}	F_I	F_{II}	F_I	F_{II}
0.1	Present Sol.	0.7569	0.4354	0.5046	0.5034	0.2525	0.4352
	Reference Sol.	0.7557	0.4339	0.5046	0.5018	0.2527	0.4352
	Error	+0.16%	+0.35%	+0.00%	+0.32%	-0.08%	+0.00%
0.2	Present Sol.	0.7738	0.4374	0.5182	0.5079	0.2602	0.4412
	Reference Sol.	0.7730	0.4367	0.5181	0.5072	0.2605	0.4417
	Error	+0.10%	+0.16%	+0.00%	+0.14%	-0.12%	-0.11%
0.3	Present Sol.	0.8031	0.4426	0.5405	0.5152	0.2729	0.4516
	Reference Sol.	0.8025	0.4417	0.5406	0.5162	0.2730	0.4521
	Error	+0.07%	+0.20%	-0.02%	-0.19%	-0.04%	-0.11%
0.4	Present Sol.	0.8456	0.4495	0.5713	0.5275	0.2893	0.4648
	Reference Sol.	0.8456	0.4497	0.5719	0.5290	0.2896	0.4660
	Error	+0.00%	-0.04%	-0.10%	-0.28%	-0.10%	-0.26%
0.5	Present Sol.	0.9042	0.4616	0.6113	0.5437	0.3097	0.4820
	Reference Sol.	0.9046	0.4617	0.6119	0.5458	0.3099	0.4827
	Error	-0.04%	-0.02%	-0.10%	-0.38%	-0.13%	-0.15%
0.6	Present Sol.	0.983	0.480	0.6604	0.5633	0.3322	0.5008
	Reference Sol.	0.984	0.480	0.6611	0.5674	0.3332	0.5022
	Error	-0.10%	+0.00%	-0.11%	-0.72%	-0.30%	-0.28%
0.7	Present Sol.	1.087	0.508	0.719	0.590	0.357	0.522
	Reference Sol.	1.091	0.508	0.721	0.595	0.359	0.524
	Error	-0.37%	+0.00%	-0.28%	-0.84%	-0.56%	-0.38%
0.8	Present Sol.	1.227	0.553	0.786	0.624	0.385	0.546
	Reference Sol.	1.245	0.550	0.795	0.630	0.388	0.549
	Error	-1.45%	+0.55%	-1.13%	-0.95%	-0.77%	-0.55%

図 4 要素分割の一例 ($\theta=45^\circ$, $a/W=0.8$, $l/a=0.2$)

$a/w=0.5$ の場合について、寸法 l を変化させて解析を行った。本解析結果 F_I, F_{II} の北川・結城の解 F_I^*, F_{II}^* からの相対偏差のき裂端有限要素寸法 l/a による変化を図 5 に示す。解の精度はき裂端部の有限要素寸法にあまり影響されず、ここで解析したケースでは $l/a=0.4$ というように大きな要素を用いても精度の低下はわずかである。

次に、仮想き裂進展量 Δa が解析値に与える影響を調べるために、 $\theta=45^\circ$, $a/W=0.5$, $l/a=0.2$ の場合について仮想き裂進展量 Δa を変化させて解析を行った。図 6 に本解析結果の北川・結城の解からの相対偏差の

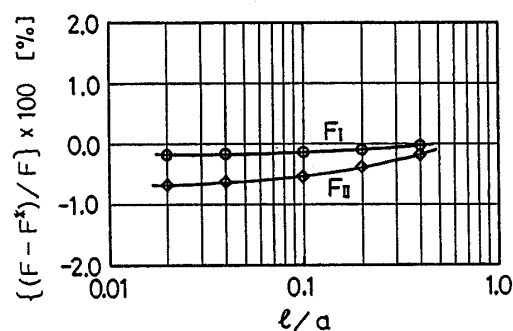


図 5 応力拡大係数のき裂端有限要素寸法による変化

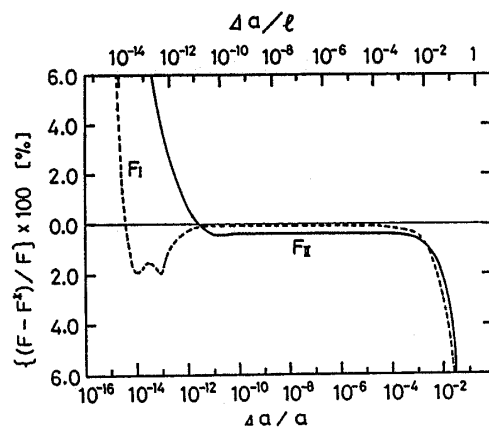


図 6 応力拡大係数のき裂進展量による変化

き裂進展量による変化を示す。 Δa をあまり大きくすると差分近似の近似度の低下のために、逆にあまり小さくすると計算機でのけた落ちのために解の精度が低下する。図6に示したのは倍精度計算の結果であるが、非常に広い範囲で解が一定精度を示しており、き裂進展量の決定にはあまり慎重な注意は必要でないことがわかる。

表1には、き裂傾斜角 θ が $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ のとき、 $a/W=0.1\sim 0.8$ まで変化させて求めた解と北川・結城の参照解との比較を示す。この表より、 $\theta=30^\circ, 45^\circ$ 、 $a/W=0.8$ のときに1%を超える偏差が生じているが、その他では、いずれも偏差1%以内となっている。

3.2 中央円弧形き裂を有する平板 ここでは図7に示すような半径 R 、き裂開き角 2α の円弧形き裂を有する平板が引張荷重をうける場合の解析結果を示す。体系の離散化の一例を図8に示す。対称性を考慮して体系の半分を離散化すれば良い。3.1節の場合と同様に、き裂先端部にのみ8節点アイソパラメトリック特異要素を配し、その他の部分には二次の境界要素を用いた。

石川によって提案された方法に従って式(4)のように変位成分をモードIとモードIIに分離するためには、き裂先端近傍においてき裂面およびき裂延長面の上下対称な点に節点をとる必要がある。しかし、曲線き裂の場合にはき裂側で節点が上下対称となるように有限要素を配置することは困難である。本解析で用いたき裂先端部における有限要素の配置を図9に示す。すなわち、き裂側の有限要素の形状をゆがめてある。有限要素寸法が小さい場合には、き裂面に対して節点の上下対称性が成り立つと考えられるが、あまり大き

な有限要素寸法に対しては、これが成り立たなくなり解の精度が低下するものと思われる。

き裂先端部に配置する有限要素の寸法 $l(=R\theta)$ が解の精度に及ぼす影響を検討するために、 $\alpha=\pi/4$ 、 $R/W=0.1$ の場合について、寸法 l を変化させて解析を行った。本解析結果の精度を検討するための参照解としては、以下に示すAtluriら⁽⁶⁾によって求められた無限板中の円弧形き裂に対する解析解を用いた。

$$K_I = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi R \sin \alpha}}{1 + \sin^2(\alpha/2)} F_I^*(\alpha)$$

$$K_{II} = \frac{\sigma_0 \sqrt{\pi R \sin \alpha}}{1 + \sin^2(\alpha/2)} F_{II}^*(\alpha)$$

$$F_I^*(\alpha) = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha/2) + \cos(3\alpha/2) + \cos(\alpha/2) \times \sin^4(\alpha/2) - 2 \sin \alpha \sin^3(\alpha/2) \}$$

$$F_{II}^*(\alpha) = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha/2) + \sin(3\alpha/2) + \sin^5(\alpha/2) + 2 \cos \alpha \sin^3(\alpha/2) \}$$

.....(7)

図10にき裂先端部における有限要素の寸法が解の精度に及ぼす影響を示す。この図ではき裂半長 $R\alpha$ に対する有限要素寸法の割合を横軸に、本解析から求まる無次元応力拡大係数 F_I, F_{II} のAtluriらの解 F_I^*, F_{II}^* からの偏差を縦軸にとってある。解の精度がほぼ一定に近くなるのは $l/R\alpha$ が0.02以下の場合であり、こ

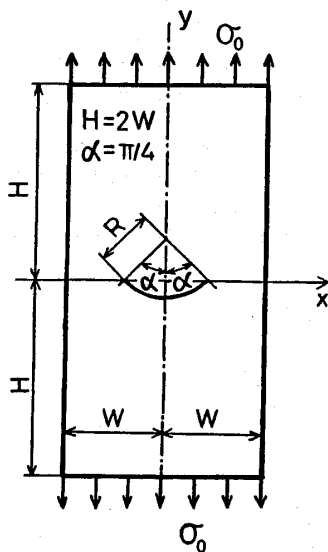


図7 中央円弧形き裂を有する平板

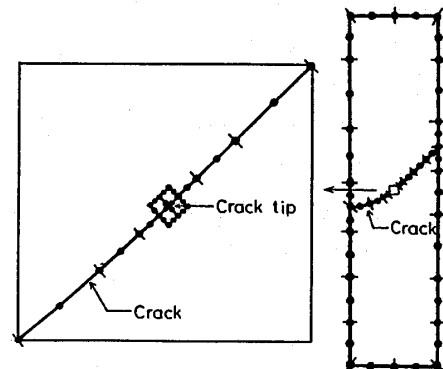


図8 要素分割の一例 ($R/W=0.7$)

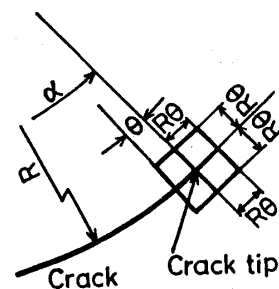


図9 き裂先端部における有限要素の配置

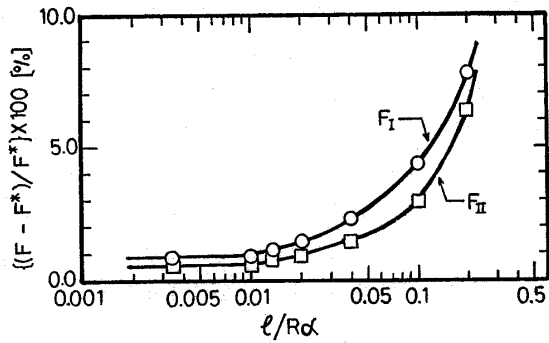


図 10 応力拡大係数のき裂端有限要素寸法による変化

で扱う曲線き裂の場合は、3・1節で扱った直線き裂よりもかなり小さな有限要素寸法をとる必要のあることがわかる。精度の検討に用いた解が無限板中のき裂に対するものであることを考慮すると、 $l/R\alpha$ を0.02以下にとれば本解析により精度が1%以下の高精度解が得られることが期待できる。

次に $\alpha = \pi/4$ で、き裂長さを $R/W = 0.1 \sim 0.8$ まで変化させて解析を行った。この場合に、き裂先端部に配置する有限要素の寸法は $l/R\alpha \approx 0.009$ とした。解析結果は、式(7)と同様に F_I, F_{II} の形で無次元した。図11に解析結果をまとめて示す。ここで、●、■印は式(7)で与えられている無限板中の円弧形き裂の解析解から求めた結果であり、その他は本解析結果を示す。 R/W が小さくなるにつれて、本解析結果は、自然に無限板に対する解析解に近づいていくことがわかる。図11に示される F_I, F_{II} を R/W の多項式の形で整理すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} F_I &= 0.6235 + 0.0267(R/W) + 0.0788(R/W)^2 \\ &\quad + 0.1072(R/W)^3 \\ F_{II} &= 0.6971 + 0.0655(R/W) - 0.0500(R/W)^2 \\ &\quad + 0.4302(R/W)^3 - 0.1171(R/W)^4 \\ &\quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

4. 結 言

本報では、き裂先端部に有限要素を配置し、その他の領域を境界要素を用いて離散化し、有限要素領域に仮想き裂進展法を適用して K 値を求めるという解法を混合モードき裂問題に適用した。解析した問題は中

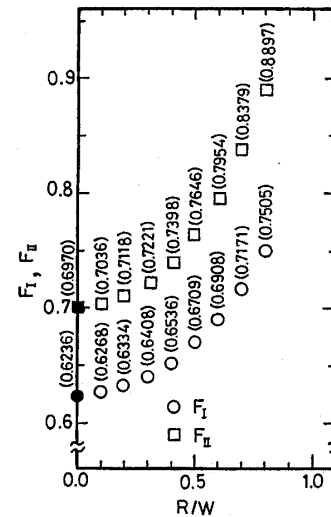


図 11 応力拡大係数のき裂長さによる変化

央傾斜き裂を有する平板および中央円弧形き裂を有する平板が引張荷重をうける場合である。得られた結論は下記のとおりである。

(1) 中央傾斜き裂のような直線き裂の場合には、き裂先端部に大きな有限要素を配置することが可能である。本報の結果では、 $l/a = 0.4$ としても解の精度の低下はわずかであった。

(2) 中央円弧形き裂のような曲線き裂の場合には、直線き裂の場合よりも小さな有限要素をき裂先端部に配置する必要がある。

(3) 境界要素法と有限要素法の結合解法に仮想き裂進展法を適用する方法により、混合モードき裂問題に対して誤差が1%以下の応力拡大係数値が得られることがわかった。

文 献

- (1) Parks, D. M., *Int. J. Fract.*, **10** (1974), 485.
- (2) Hellen, T. K., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **9** (1975), 187.
- (3) 宮崎・ほか2名, 機論, 55-509, A (昭64), 101.
- (4) Ishikawa, H., *Int. J. Fract.*, **16** (1980), R243.
- (5) 北川, 結城, 機論, 43-376 (昭52), 4354.
- (6) Atluri, S. N., ほか2名, *Int. J. Fract.*, **11** (1975), 257.