

境界要素法と有限要素法の結合解法による応力拡大係数解析*

(軸対称問題に対する適用)

宮崎 則幸^{*1}, 池田 徹^{*2}
伊東 謙一^{*3}, 宗像 健^{*1}

Stress Intensity Factor Analysis by Combination of Boundary Element and Finite Element Methods (Application to Axisymmetric Crack Problems)

Noriyuki MIYAZAKI, Toru IKEDA,
Kenichi ITO and Tsuyoshi MUNAKATA

This paper presents the stress intensity factor analysis of axisymmetric crack problems. A stress analysis is performed with the combination of the boundary element method and the finite element method, and then the stress intensity factor is calculated by the virtual crack extension method. First, the stress intensity factor analysis of a circumferential crack in a cylindrical bar under tension is performed and the results are compared with reference solutions to check the applicability of the present method. Then the problems of a crack in an outer or inner wall of a pipe under tension are analyzed. Approximate equations of the stress intensity factor for both problems are proposed.

Key Words: Fracture Mechanics, Stress Intensity Factor, Boundary Element Method, Finite Element Method, Virtual Crack Extension Method

1. 緒 言

応力拡大係数(以降、 K 値と呼ぶ)は、構造物の破壊現象に関するパラメータとして重要であるが、これを解析的に求めることは通常困難であり、数値解析手法を用いることが一般に行われている。

特に、有限要素法(FEM)は、最も広く用いられている手法であり、これにより K 値を求める方法も種々考案されている。

この中で、よく用いられている方法の一つに、エネルギー法の一種である仮想き裂進展法⁽¹⁾⁽²⁾がある。この方法は、1回の解析でき裂のエネルギー解放率を算出でき、また、比較的粗い要素分割でも高精度な解析が行えるといった特徴を持っている。

一方、近年、境界要素法(BEM)が、有限要素法と並んで構造物の応力解析に利用されることが多くなってきた。BEMは、境界のみを離散化すればよいことから、FEMに比較して、著しくデータ入力の労力を軽減することができる特徴を持っている。

著者らは、前報⁽³⁾⁽⁴⁾において、き裂先端にのみ有限要素を配し、その他の領域を境界要素法によって離散化する結合解法に仮想き裂進展法を組み込む方法を提案し、これによって、BEMの入力の労力を軽減できるという特質と仮想き裂進展法の特質の両方を生かすことが可能であることを示した。

前報においては、二次元問題に対する適用例のみを示したが、本報では、これを軸対称問題に適用した結果を示す。

2. 解 析 方 法

図1に境界要素法と有限要素法の結合解析の概念図を示す。すなわち、き裂周辺の領域 Ω^F を有限要素法で、その他の領域 Ω^B を境界要素法で離散化し、これを内部境界 Γ' での適合条件および平衡条件を考慮して結合する。

まず、 Ω^B について、軸対称問題に対する境界要素法の基礎式は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} C_{ij}(P)u_j(P) + 2\pi \int_{\Gamma} p_i^*(P, Q)u_j(Q)r(Q)d\Gamma \\ = 2\pi \int_{\Gamma} u_i^*(P, Q)p_j(Q)r(Q)d\Gamma \quad \dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここで u_j, p_j は境界上の点での変位および表面力を、

* 原稿受付 平成2年2月21日。

*1 正員、九州大学工学部(812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*2 正員、九州大学大学院。

*3 九州大学工学部。

r は対称軸から Q 点までの距離を示す。また、 $u_i^*(P, Q)$, $p_j^*(P, Q)$ は、軸対称問題の基本解⁽⁵⁾であり、図 2 に示すような座標系において、 P 点に i 方向単位軸対称荷重が作用するときの Q 点において生じる j 方向の変位および表面力を示す。 C_{ij} は P 点が領域内部にあるとき、次式のようになる。

また、P点が境界上にあるとき、 C_{ij} は境界形状によって決まる係数である。通常の二次元問題や三次元問題においては、剛体変位条件を用いてこれを求めることができるが、軸対称問題においては ν 方向に剛体移動することができない。そこで、 z 軸方向には剛体変位条件を適用し、 r 方向については、等温膨張の熱伸びを拘束することにより生じる応力が一様である条件を利用することにより、 C_{ij} を決定した⁽⁶⁾。

さらに、領域 Ω^B の境界を離散化して点 P と点 Q を関係づけることにより、次式のような系全体のマトリックス方程式を得る。

$$H\mathbf{U}_B = \mathbf{G}\mathbf{P}_B \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

ここで、 \mathbf{H}, \mathbf{G} は係数マトリックス、 $\mathbf{U}_B, \mathbf{P}_B$ はそれぞれ Ω^B の境界上での節点変位ベクトル、節点表面力ベクトルを表す。式(3)に左から \mathbf{G}^{-1} と節点表面力ベクトルを節点力ベクトルに変換するマトリックス \mathbf{M} を作用させることにより、次式のような有限要素形の方程式が得られる。

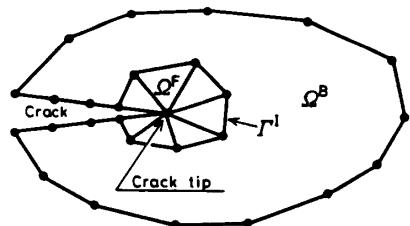


図 1 BEM と FEM の結合モデル

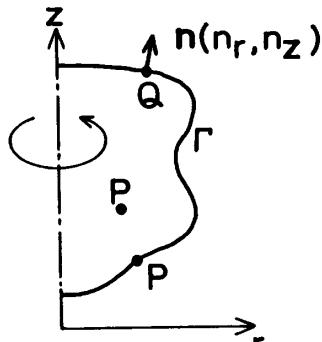


図 2 軸対称の基本解

ここで、 $K_B = MG^{-1}H$ である。一方、領域 Ω^F に対しては、次式のような有限要素平衡方程式が得られる。

ここで、 K_F は剛性マトリックス、 $\mathbf{U}_F, \mathbf{F}_F$ はそれぞれ領域 Ω^F の有限要素の節点変位および節点荷重ベクトルである。さらに、内部境界 Γ' 上での適合条件および平衡条件を用いることにより式(4), (5)は次の一つの式にまとめられる⁽³⁾。

ここで、 K , U , F は、それぞれ系全体の剛性マトリックス、節点変位および節点荷重ベクトルである。

また、仮想き裂進展法によれば、き裂の進展に伴つて外力が変化しないような系に対して、エネルギー解放率 G は次式で与えられる。

$$G = - \sum_{i=1}^{N_F} \frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \frac{\Delta \mathbf{k}_i}{\Delta a} \mathbf{u}_i \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

ここで、 Δa は微小き裂進展量、 u_i は要素節点変位であり、 Δk_i はき裂先端を取り囲む領域 Ω^F における有限要素 ($i=1 \sim N_F$) の Δa に伴う要素剛性マトリックスの変化量である。また、このとき K_1 値は、次式のように与えられる。

$$K_1 = \sqrt{EG/(1-\nu^2)} \dots \dots \dots \quad (8)$$

ただし、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比である。

3. 解 析 結 果

3・1 周形き裂を有する丸棒の引張り 図3に示

すように、外壁に深さ a の環状き裂が対称軸 (z 軸) に垂直に入っている直径 $2d$ 、長さ $2H$ の丸棒が、両端で一様引張応力 σ_0 を受けている問題を考えた。なお、解析は、図 4 に要素分割の例を示すように、 r 軸面での

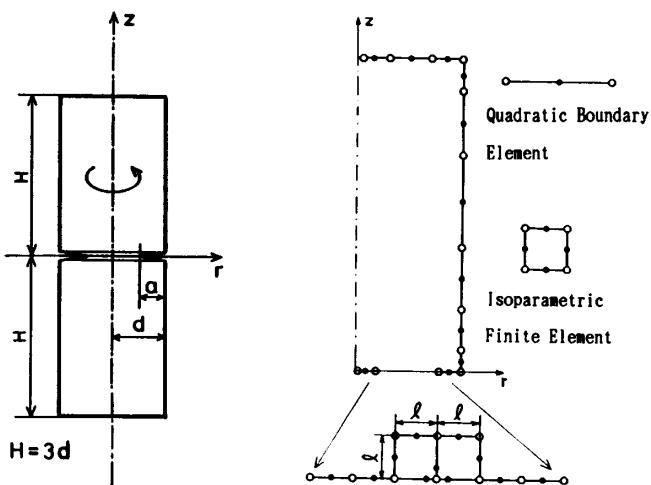


図 3 周形き裂を有する丸棒

図 4 要素分割図
($a/d = 0.5$, $l/a = 0.2$)

対称性を考慮した1/2部分について行い、き裂先端部に二つの8節点アイソパラメトリック有限要素を配置し、その他の部分には2次の境界要素を用いた。ただし、 z 軸に接する境界要素については、 z 軸上に節点をとると、式(3)におけるマトリックス G が正則でなくなり、逆行列 G^{-1} を求めることができなくなるため、 z 軸に接する境界要素についてのみ、図5に示すような、非適合要素を用いた。また、解析結果は、 $F_I (=K_1/\sigma_0\sqrt{\pi a})$ という無次元化した形で示し、本解析結果の精度を評価するために西谷・野田による体積力法による解析値⁽⁷⁾を参照解(F_I^*)として用いた。なお、以下の解析は、すべて、ポアソン比0.3とし、倍精度で計算を行った。

まず、き裂先端の有限要素の大きさの適正範囲を調べるために、き裂長さ $a/d=0.5$ の場合について、有限要素の大きさ l を変化させて解析を行った。この場合の解析結果について、 l/a と、本解析結果と参照解との相対偏差の関係を図6に示す。このとき、仮想き裂進展量 Δa は、 $\Delta a/l=10^{-8} \sim 10^{-6}$ にとった。図6より、 $l/a=0.01 \sim 0.3$ の範囲において、解析結果はほぼ一定となっていることがわかる。

また、仮想き裂進展量 Δa についても、 $a/d=0.5$ 、 $l/a=0.2$ の場合について、 Δa を変化させて解析を行い、解析結果に与える影響を調べた。その結果を図7に示す。これより、 $\Delta a/l=10^{-11} \sim 10^{-3}$ の非常に広い範

囲で解析値は一定となっていることがわかる。ここで、 Δa が非常に小さいところで、精度が急速に低下するのは、計算機のけた落ちによるものであり、 $\Delta a/l$ が 10^{-3} 以上においての精度の低下は、差分近似における微小き裂進展の前提が満たされなくなるためと考えられる。

次に、 a/d を0.1から0.9まで変化させて解析を行った結果を、参照解とともに表1に示す。本解析結果と参照解とは、良い一致を示していることがわかる。なお、解析は、 $0.067 \leq l/a \leq 0.2$ 、 $5 \times 10^{-8} \leq \Delta a/l \leq 1.5 \times 10^{-7}$ で行った。

3・2 外壁に周形き裂を有する円管の引張り 第二の例として、図8に示すような、外径2B、内径 $2(B-d)$ 、長さ $2H$ で、外壁に z 軸に垂直に深さ a のき裂が入っている円管が、端部に一様引張応力 σ_0 を受けている場合について、解析を行った。解析は、 $d/B=0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.15, 0.20$ の各場合について、 $a/d=0.1 \sim 0.9$ まで変化させて行い、結果は、 $F_I (=K_1/\sigma_0\sqrt{\pi a})$ という無次元化した形で整理した。さらに、 F_I が次式のような x ($=a/d$)、 y ($=d/B$) の関数

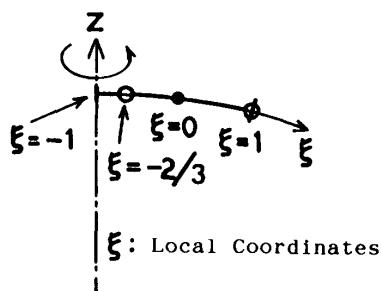


図5 非適合要素

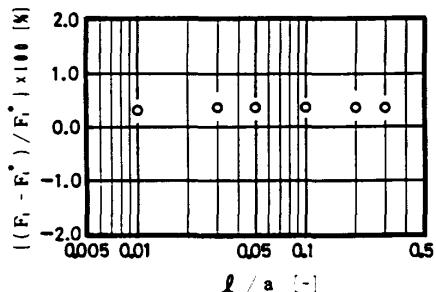


図6 き裂先端有限要素が解析精度に与える影響

表1 周形き裂を有する丸棒の引張りにおける
応力拡大係数

a/d	No. of Nodes	F_I	F_I^*	D E V [%]
0.1	55	1.185	1.180	+0.42
0.2	51	1.267	1.261	+0.48
0.3	47	1.398	1.393	+0.36
0.4	45	1.608	1.602	+0.37
0.5	43	1.947	1.940	+0.36
0.6	41	2.526	2.516	+0.40
0.7	43	3.634	3.618	+0.44
0.8	45	6.271	6.243	+0.45
0.9	41	16.76	16.67	+0.54

$$D E V = \{ (F_I - F_I^*) / F_I^* \} \times 100 [\%]$$

$$F_I = K_1 / \sigma_0 \sqrt{\pi a}, \quad F_I^* = K_I^* / \sigma_0 \sqrt{\pi a}$$

F_I , K_1 : Present solution

F_I^* , K_I^* : H. Nishitani and N. Noda's solution

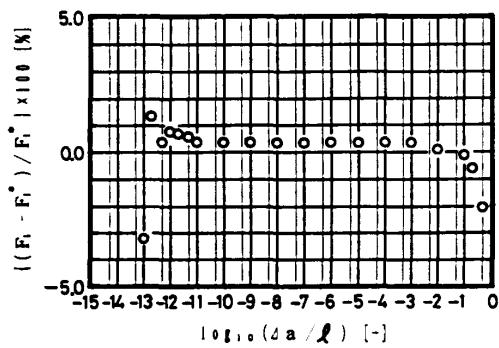


図7 仮想き裂進展量が解析精度に与える影響

で表されると仮定し、最小二乗法によって、表2に示す係数 C_{ij} ($i=0, 4$; $j=0, 4$) を決定した。解析結果と、近似式(9)・表2を用いた計算値との偏差は、 $\pm 0.8\%$ 以下である。また、解析結果および近似式による、 d/B および a/d と F_i の関係を図9に示す。図中では、解析値を○印で、近似式を線で示してある。

$$F_i = \sum_{j=0}^4 \sum_{i=0}^4 C_{ij} \frac{x^i}{1-x} y^{j-1} \dots \quad (9)$$

3・3 内壁に周形き裂を有する円管の引張り 第三の例として、図10に示すような、外径 $2B$ 、内径

$2(B-d)$ 、長さ $2H$ で、内壁に z 軸に垂直に深さ a のき裂が入っている円管が、端部に一様引張応力 σ_0 を受けている場合について、解析を行った。解析は、 $d/B = 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.15, 0.20$ の各場合について、 $a/d = 0.1 \sim 0.9$ まで変化させて行い、結果は、外壁き裂を有する円管の場合と同様に無次元化し、同じ式(9)で近似されるとして、係数 C_{ij} を決定した。結果を、表3に示す。解析結果と、近似式(9)・表3を用いた計算値との偏差は、 $\pm 0.8\%$ 以下である。また、解析結果および近似式による、 $d/B \cdot a/d$ と F_i の関係を図11に示す。

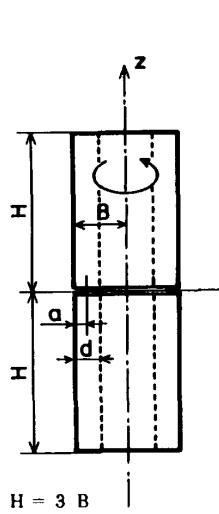


図8 外壁に周形き裂を有する円管

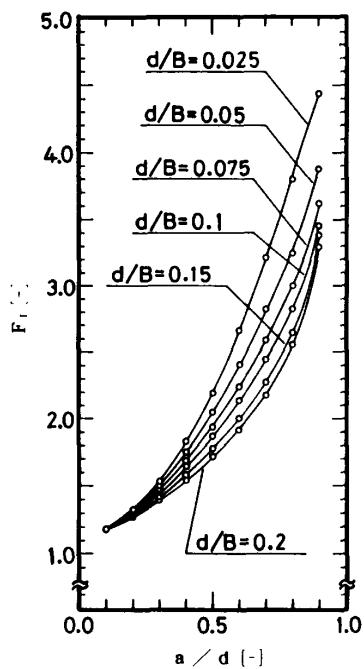


図9 外壁に周形き裂を有する円管のき裂の応力拡大係数

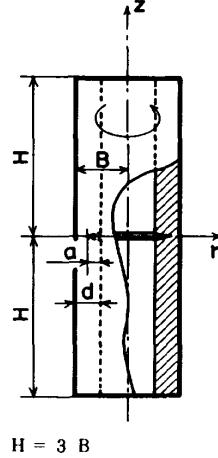


図10 内壁に周形き裂を有する円管

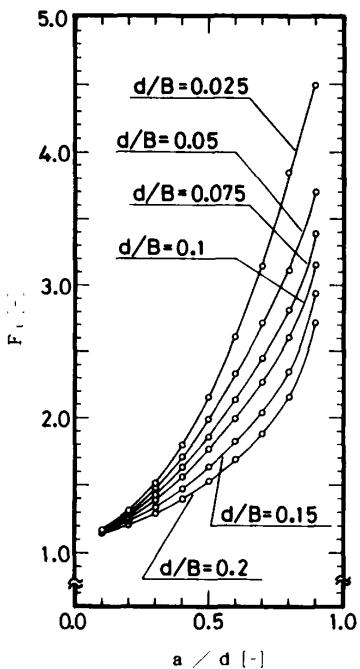


図11 内壁に周形き裂を有する円管のき裂の応力拡大係数

表2 外壁に周形き裂を有する円管の引張りにおける応力拡大係数の近似式の係数

i	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
0	-0.000100	1.1296	-0.17882	0.69963	-1.9593
1	0.011510	-1.4977	10.987	-61.581	142.00
2	-0.094677	8.8599	-97.314	532.42	-1170.5
3	0.21762	-14.577	157.21	-894.34	2027.6
4	-0.13903	6.2844	-73.139	445.64	-1058.4

($0.025 \leq d/B \leq 0.20$, $0.1 \leq a/d \leq 0.9$)

表3 内壁に周形き裂を有する円管の引張りにおける応力拡大係数の近似式の係数

i	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}
0	-0.001857	1.1990	-1.3288	7.9235	-17.307
1	0.034298	-2.3953	22.858	-138.14	289.92
2	-0.19519	12.976	-157.51	883.49	-1845.7
3	0.37742	-21.347	256.97	-1465.8	3132.5
4	-0.21825	9.7215	-122.76	730.01	-1608.5

($0.025 \leq d/B \leq 0.20$, $0.1 \leq a/d \leq 0.9$)

様に、図 11 に示す。

4. 結 言

本報では、き裂先端部に有限要素を配置し、その他他の領域を境界要素を用いて離散化し、有限要素領域に仮想き裂進展法を組込んで応力拡大係数を求める方法を軸対称問題に適用した。本手法を用いて、周形き裂を有する丸棒、外壁に周形き裂を有する円管、内壁に周形き裂を有する円管がそれぞれ引張りを受ける場合について解析を行った。これにより、次のような結果が得られた。

(1) 軸対称問題においてき裂が平面状である場合、き裂先端に大きな有限要素を配置することが可能である。本報においては、 $l/a=0.3$ としても解の精度の低下は見られなかった。

(2) 境界要素法と有限要素法の結合解法に仮想き

裂進展法を組込む方法により、軸対称き裂問題に対して、誤差 1 % 以内の精度で応力拡大係数を求められることが期待できる。

(3) 通常使用される円管が内、外壁に周形き裂を有する場合を想定して、このき裂の応力拡大係数の解析を行い、最小二乗法によって、近似式を作成した。

文 献

- (1) Parks, D. M., *Int. J. Fract.*, **10** (1974), 485.
- (2) Hellen, T. K., *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **9** (1975), 187.
- (3) 宮崎、ほか 2 名、機論、**55-509**, A (1989), 101.
- (4) 宮崎、ほか 2 名、機論、**55-513**, A (1989), 1180.
- (5) Bakr, A. A. and Fenner, R. T., *J. Srrain Analysis*, **18-4** (1983), 239.
- (6) 蔦、山地、川崎重工技報、**79**(1982), 1.
- (7) 西谷、野田、機論、**50-453**, A(1984), 847