

境界要素法による界面き裂の応力拡大係数解析*
(第2報, 径路積分法の適用)宮崎 則 幸^{*1}, 池田 徹^{*2}
祖田 敏 弘^{*3}, 宗像 健^{*1}Stress Intensity Factor Analysis of Interface Crack
Using Boundary Element Method
(2nd Report, Application of Contour-Integral Method)Noriyuki MIYAZAKI, Toru IKEDA,
Toshihiro SODA and Tsuyoshi MUNAKATA

This paper presents a new method for stress intensity factor analysis of 2-dimensional crack problems including a mixed-mode interface crack between dissimilar materials. The M_I -integral method, an extended version of the J -integral method, was applied for interface crack problems with the finite-element method by Yau and Wang. In the present paper, the M_I -Integral method is combined with the boundary element method. At first, we improved the accuracy of the results of interior points by using adaptive automatic integration for a singular boundary integral. The value of the J -integral or M_I -integral was also obtained by this automatic integration scheme. We applied the present method to a center-cracked plate under tension. Furthermore, we analyzed a plate with an edge interface crack and a plate with a center slant interface crack between dissimilar materials subjected to tension. It is found from these analyses that the present method gives very accurate results, which are insensitive to the contour integral paths except for the region close to the crack tip.

Key Words: Boundary Element Method, Stress Intensity Factor, Fracture Mechanics, J -Integral, Contour-Integral, Interface Crack, Mixed Mode

1. 緒 言

複合材料や接着構造物の強度に関連して, 界面き裂の破壊挙動の定量的な評価は重要である。

第1報⁽¹⁾において, 著者らはき裂先端に仮想的な有限要素を想定し, これに仮想き裂進展法を適用する方法を提案し, これにより異種材界面き裂を含む混合モードき裂の応力拡大係数の解析が行えることを示した。

本報では, 適応的自動積分法⁽²⁾を用いて境界要素法解析における境界近くの内点の応力解析精度を改善し, さらに径路積分法における積分にも適応的自動積分を用いることによって, 少ない入力データで, 高精度の異種材界面き裂の応力拡大係数の解析が行えることを示す。

有限要素法による応力拡大係数の解析では, エネルギー法の一つである仮想き裂進展法や, J 積分法などの径路積分法が多用されているが, 境界要素法においては変位外挿法・応力外挿法などがよく用いられ, エネルギー法や径路積分法はあまり用いられていない。

この理由は種々考えられるが, まずエネルギー法については, 境界要素法では有限要素法における仮想き裂進展法のような洗練されたエネルギー法による応力拡大係数の解析法がないために, 微小き裂進展前後の応力解析を行いエネルギー解放率を求める必要があるという点が問題となっている。また径路積分法については, 内点の応力評価を必要とする点が境界要素法に不向きとされているが, その他にも境界内部に径路積分のための径路の要素分割が必要となるため, 余分のデータ入力の労力と計算時間が必要となることや, 境界要素法によって内点の応力を求める際に, 境界に非常に近い点では計算の際に特異積分が現れ精度が低下するために, 径路積分の計算値の精度が必ずしも他の応力拡大係数解析法に比べて高くないことなどもその理由であると思われる。

しかしながら, エネルギー法や径路積分法は, 本来, 比較的粗い要素分割でも精度の高い応力拡大係数の解析が行える長所を有しており, また, J 積分法などは, 非線形問題への拡張が可能であるなど, 境界要素法においてもこれらの手法が活用できるようにすることは意義があると考えられる。

また, 異種材界面き裂に対する径路積分法の適用法として, Chen-Shield⁽³⁾によって均質体中の混合モー

* 原稿受付 平成3年3月22日。

^{*1} 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。^{*2} 正員, 九州大学大学院。^{*3} 九州大学工学部。

どき裂の解析法として J 積分法を改良した方法として提案され、Yau-Wang⁽⁴⁾ によって異種材界面き裂のモード分離に応用された M_I 積分法がある。本論文では、この方法を用いることによって異種材界面き裂の解析を行った。

2. 界面き裂の応力拡大係数

異種材界面き裂のき裂先端近傍の応力の分布は、Rice-Sih⁽⁵⁾ によって示された。また、Sun-Jih⁽⁶⁾ は、これらを基にして、図1に示すような座標系に対して、き裂先端近傍の応力と変位の式を導いている。この式については、第1報⁽¹⁾ に詳しく示したため省略する。

このとき、エネルギー解放率 G と K_I , K_{II} の関係は、次式のように示される⁽⁷⁾。

$$G = \beta(K_I^2 + K_{II}^2)$$

$$\beta = \frac{1}{16 \cosh^2(a\pi)} \left[\frac{x_1+1}{\mu_1} + \frac{x_2+1}{\mu_2} \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\left(\frac{x_1+1}{\mu_1} + \frac{x_2+1}{\mu_2} \right) / \left(\frac{x_2+1}{\mu_2} + \frac{x_1+1}{\mu_1} \right) \right]$$

$$x_j = \begin{cases} 3-4\nu_j & (\text{Plane strain}) \\ (3-\nu_j)/(1+\nu_j) & (\text{Plane stress}), (j=1,2) \end{cases}$$

$$\mu_j; \text{Shear modulus}, \nu_j; \text{Poisson's ratio}$$

.....(1)

3. 内点の変位・応力の精度の改善

境界要素法に J 積分法を適用し、高い精度の解を得るためには内点の変位・応力の解析値が高い精度を有することが前提条件となる。物体力を無視した境界要素法解析における離散化された積分方程式は、次式のように示される。

$$C_{ij}(P)u_j(P) + \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_k} p_j^*(P, Q)u_j(Q)d\Gamma_k \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{\Gamma_k} u_j^*(P, Q)p_j(Q)d\Gamma_k \right\} \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 p_j , u_j は表面力ベクトルと変位ベクトル、 p_j^* , u_j^* は基本解、 C_{ij} は係数、 P は基本解の特異点、 Q は境界上の点を示している。このとき、点 P が近接する境界要素における積分は特異積分となる。境界上の変位と表面力を求める際は、剛体移動条件を用いる

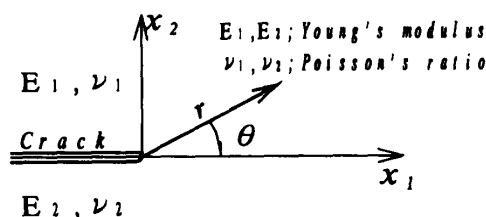


図1 異種材界面き裂周辺の座標系

ことによって特異積分の処理を間接的に処理できるため精度上の問題は少ないが、境界近くの内点の変位・応力を求める際には、この特異積分の処理が問題となる。この解決策として、要素のサブエレメント分割を行う方法や二重指数関数積分⁽⁸⁾⁽⁹⁾を用いることによって特異積分を処理する方法が提案されている。本報では、新たに適応的自動積分⁽²⁾によって特異積分を行う方法を提案する。なお、解析のための境界要素は、いずれも二次要素を用い、計算は倍精度で行った。

3.1 内点の変位・応力の解析方法 本解析に用いた境界要素法コードは、特異点 P と積分対象の境界要素の距離によって積分点の数を2~10まで変化させた Legendre-Gauss 積分を用い、点 P と境界要素が近接する場合には次の四つの方法で処理した。

(a) 積分点数10の Legendre-Gauss 積分

(b) 図2に示すようなサブエレメント分割を行って各サブエレメントに6点の Legendre-Gauss 積分を用いる。

(c) 二重指数関数積分公式を用いる。

(d) 適応的自動積分を用いる。

上記の(a), (b)については、特に説明の必要はないと思われるので、(c), (d)についてのみ簡単に説明する。

まず、(c)二重指数関数積分は、次式のような積分を行う際に

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \dots\dots\dots(3)$$

次のような変数変換を行うことにより得られる、

$$\xi = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right) \dots\dots\dots(4)$$

二重指数積分公式、

$$I(h) = \sum_{i=-N_+}^{N_-} f(a_i) \cdot w_i$$

$$a_i = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(ih)\right)$$

$$w_i = h \left\{ \frac{\pi}{2} \cosh(ih) \right\} / \left\{ \cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(ih)\right) \right\}$$

.....(5)

を用いる。ここで、 h は刻み幅である。ここで、重み w_i は、 i の増大に伴って急速に減衰するため、 N_+ , N_- は

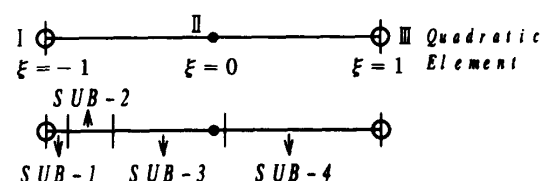


図2 節点Iに特異性を持つ場合のサブエレメント分割の例

適当な大きさに打切ることができる。また、分点の座標 a_i および重み w_i はあらかじめ計算し、

DATA-FILE として準備することによって無駄な計算時間を消費しないように配慮した。刻み幅 h は、次式のような基準を満たさない場合は $h_{n+1}=1/2h_n$ に分割し、自動的に目的の精度を達成するようにした (ただし、 $h_0=0.5, n=0\sim6$)。

$$\left| \frac{I(h_{n-1}) - I(h_n)}{I(h_n)} \right| \leq \epsilon \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 ϵ は目的精度である。

二重指数関数積分では、変換空間での標本点が等間隔 h でとられるため、前のステップで計算した標本点の関数値は、そのまま次のステップに持ち越される。

また、(d) 適応的自動積分^(a)とは、被積分が積分区間内において特異性をもつ場合に、特異性をもつ部分を自動的に再分割することによって自動的に目的の積分精度を確保する数値積分方法である。この積分方法は、図3に示すような簡単なメカニズムで達成される。例えば、5点のNewton-Cotes積分の場合、(i)のように積分区間に等間隔に積分点が配置される。次に、(ii)のように(i)の積分点の中間に新たに積分点が配置され、積分区間は二等分される。ここで、式(6)と同様に(i)と(ii)の計算値の差が許容誤差内にあれば計算を打ち切り、もしそうでなければ、(ii)の二つの区間をそれぞれ(i)の一つの区間と考えて再分割し、これを繰返すことによって特異性の高い部分は細かく、そうでない部分は粗く分割し、必要な積分精度を得る。Newton-Cotes積分のように等分割に積分点が配置される積分法による適応的自動積分では、二重指

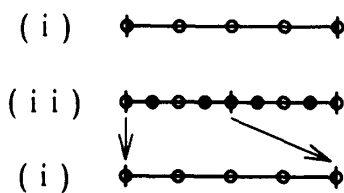


図3 適応的自動積分の原理

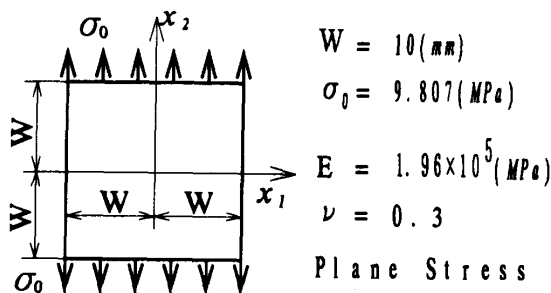


図4 一様引張りをうけるく形板

数関数積分同様、前のステップで計算した標本点の関数値は、そのまま次のステップに持ち越される。数値積分における計算時間のほとんどは、標本点の関数値の計算に費やされ、これに比べると標本点の関数値に重みをかけて和をとるという操作の計算時間は無視できる程度であるので、この性質によって、効率的な数値積分が行える。

本手法では、任意の関数に関して、二重指数関数積分および9点Newton-Cotes積分による適応的自動積分を行う汎用のサブルーチンを開発し、これにより、境界近くの内点の解析を行う際の特異積分を処理した。

3.2 内点の変位・応力の解析結果 特異積分の処理方法と内点の解析精度の関係を調べるために、図4に示すように形板が一様引張りを受ける場合の内点の変位・応力の解析を行った。図5に示すように、境界上の節点に向かって解析対象点を近づける例として、 $x_1=4.0$ mmの線上を節点に向かって $x_2 \rightarrow 0$ に近づける場合 (Case 1) を、また、節点からわずかに離れた境界上に近づける例として、 $x_1=4.2$ mmの線上を $x_2 \rightarrow 0$ に近づける場合 (Case 2) の解析を行った。解析結果のうち、 x_2 座標の変位に対する x_2 方向変位 u_2 の精度の変化を図6、8に、また、その場合の一つの内点の解析を行うために必要な境界積分の総積分評価点数を図7、9に示した。また、二重指数関数積分および適応的

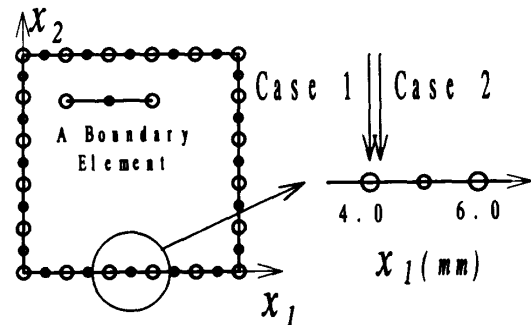


図5 境界に近接する内点の解析対象点の配置

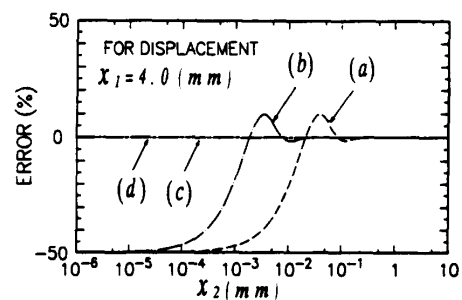


図6 $x_1=4.0$ mmにおける内点の変位の解析精度

自動積分における解析の目的精度は $\epsilon=1.0 \times 10^{-4}$ とした。

図6より, Case 1 の場合, (a) の通常の Legendre-Gauss 積分ではすぐに精度が低下するが, (b) のサブエレメント分割法によってかなり近接した点まで精度の低下が生じず, (c), (d) の二重指数関数積分と Newton-Cotes 積分による適応的自動積分では, 非常に境界に近い点でも精度の低下がないことがわかる。また, 図7より(c), (d)では, x_2 座標の減少に伴って次第に総積分評価点数が増えているが, 適応的自動積分のほうが二重指数関数積分より積分点の増加が滑らかであることがわかる。

次に, 図8より, Case 2 の場合には, サブエレメント分割法の精度が低下し, 二重指数関数積分も Case 1 に比較すると格段に境界から遠方で精度の低下が生じる。さらに図9より, 二重指数関数積分の総積分点数は x_2 座標の減少に伴って極端に増加していることがわかる。これは, 二重指数関数積分が, 積分区間の端部に特異点があるときには有効であるが, わずかでも端部からはずれた点に特異性をもつ関数に対しては非常に効率が悪くなる性質をもつためであり, これを任意の内点の計算に用いるためには特異点を検出して領域を分割するなどの工夫が必要と思われる。これに対して, 適応的自動積分法では, Case 1 の場合とほぼ同様の結果が得られた。

また, 応力の精度についても同様の傾向が見られ

た。

以上のことより, 適応的自動積分では, 境界に近接した内点の値を精度よく計算することができ, 境界要素法において, 境界に近接した内点の計算を行う際の特異積分の処理に適した積分手法と考える。

4. 応力拡大係数の解析

4.1 応力拡大係数の解析方法

4.1.1 適応的自動積分法による径路積分法 J 積分あるいは, 次節で述べる M_I 積分の径路積分についても適応的自動積分を適用した。例えば, 図10に示すようなき裂の径路積分の場合, 積分径路上の座標点①~⑦を指定することによって, 各点の間を適応的自動積分によって積分する。これによって, わずかな径路積分のためのデータを入力するだけで, 希望する精度の径路積分が行える。

また, この場合の適応的自動積分には, Legendre-Gauss の四点積分を用い, 内点の特異積分の場合同様, 汎用のサブルーチンを作成して使用した。

4.1.2 M_I 積分法による界面き裂の解析方法異種材界面き裂の場合, 荷重条件が単一モードであっても応力拡大係数は, 混合モード状態となり, モード分離が必要となる。Yau-Wang⁽⁴⁾ は, 応力拡大係数の重ね合わせの原理を利用することによって混合モードき裂の J 積分解析モード分離を行う M_I 積分⁽³⁾ を, 異種材界面き裂に適用した。以下にその概略を示す。

いま, 図11に示したような異種材界面き裂におい

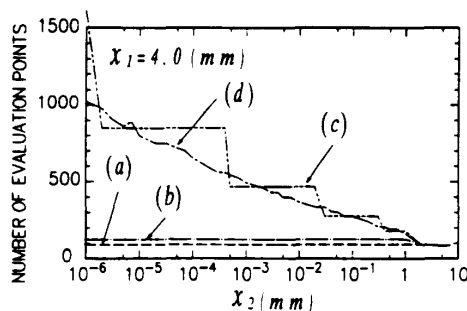


図7 $x_1=4.0$ mmにおける内点解析の総積分評価点数

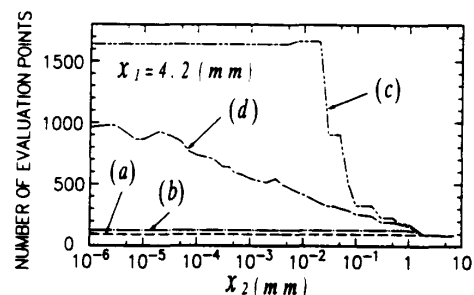


図9 $x_1=4.2$ mmにおける内点解析の総積分評価点数

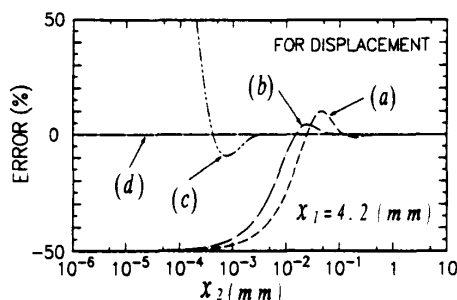


図8 $x_1=4.2$ mmにおける内点の変位の解析精度

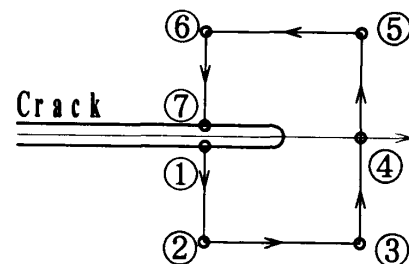


図10 適応的自動積分による J 積分

て、 J 積分は次式のように定義される。

$$J = G = \int_{\Gamma} \left[W n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\Gamma \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 Γ は積分経路、 W はひずみエネルギー密度、 n_1 は、 Γ 上での法線ベクトルの x_1 方向成分、 T_i は Γ 上に作用する表面力ベクトル、 u_i は変位である。 Γ 内の解析対象の応力とひずみの状態を(1)とし、同様のき裂に対して、応力拡大係数が既知であるようなある応力とひずみの状態を(2)とする。また、状態(1)と状態(2)の応力とひずみを重ね合わせた状態を(1+2)とすると、状態(1)、(2)、(1+2)の関係は、次式のように示される。

$$\begin{aligned} \sigma^{(1+2)} &= \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \\ \epsilon^{(1+2)} &= \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(2)} \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 σ, ϵ は、それぞれ Γ 内の任意の点の変位ベクトルおよび応力テンソルであり、添字(1)、(2)、(1+2)は、それぞれの状態を示している。

また、応力拡大係数についても、次式のような重ね合わせの法則が成立する。

$$K_j^{(1+2)} = K_j^{(1)} + K_j^{(2)} \quad (j = \text{I, II}) \dots\dots\dots (9)$$

式(1)、(7)および式(9)より、状態(1+2)の J 積分値 $J^{(1+2)}$ は、次式のように示される。

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \beta [(K_I^{(1+2)})^2 + (K_{II}^{(1+2)})^2] \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} + 2\beta [K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}] \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

よって、次式のように M_I 積分が定義される。

$$\begin{aligned} 2\beta [K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}] &= J^{(1+2)} - J^{(1)} - J^{(2)} = M_I \\ M_I &= \int_{\Gamma} \left[\sigma_i^{(1)} \epsilon_i^{(2)} n_1 \right. \\ &\quad \left. - \left(T_i^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + T_i^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \right] d\Gamma \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

式(10)、(11)における $\beta, K_I^{(2)}, K_{II}^{(2)}$ は、既知であるので、適当な既知の解を用いることによって、式(11)の M_I 積分値より応力拡大係数をモード I, II に分離することができる。本手法においては、状態(2)の既知の解として、異種材界面き裂のき裂先端近傍の解を用い、式(11)に $(K_I^{(2)}=1, K_{II}^{(2)}=0)$ および $(K_I^{(2)}=0,$

$K_{II}^{(2)}=1)$ を代入することにより、応力拡大係数をモード I, II に分離した。

4.2 応力拡大係数の解析結果

4.2.1 均質体中のき裂の応力拡大係数解析 適応的自動積分法による境界要素法での J 積分解析の有効性を調べるために、図12に示すような、中央き裂をもつ形板が引張りを受ける場合について解析した。

解析は、 $a/W=0.5$ の場合について、 J 積分値の目的精度 $\epsilon=1.0 \times 10^{-2}$ で解析を行った。結果は、 $F_I = K_I / (\sigma_0 \sqrt{\pi a})$ の形で無次元化し、石田の解⁽¹⁰⁾を参照解として比較した。

解析における境界要素は、二次要素を用い、き裂先端のき裂端境界要素として、き裂先端の境界要素の中間節点をき裂先端側に1/4移動させることによって、き裂開口変位の特異性を表すき裂端特異要素(以後、A形特異要素と呼ぶ)と、これに加えて、リガメント側の境界要素の表面力の内挿関数に $1/\sqrt{r}$ の特異性を表す係数を乗じて、応力の特異性も表したき裂端特異要素⁽¹¹⁾(以後、B形特異要素と呼ぶ)の二つのき裂端特異要素を用いて解析を行い比較した。

まず、 J 積分経路と応力拡大係数の解析精度の関係を調べるために、図13の上部に示すような要素分割で点線のような積分経路をとり、き裂先端から積分経路までの代表距離 r を変化させて解析を行った。同図に積分経路までの代表距離 r と石田の解を基準とした解析値の誤差の関係を示す。

これより、A形のき裂先端特異要素を用いた場合には、き裂先端の境界要素の長さにより r が小さいときに解析精度が低下するが、B形のき裂先端特異要素を用いた場合には、き裂先端の極めて近くに積分経路を設定しても解析精度は低下しないことがわかる。

また、要素分割を粗くした場合の解析精度を調べるために図14に示すような粗い要素分割において、積分経路 Path 1~Path 3 で J 積分解析を行った結果を表1に示す。この表で通常分割 (Usual Mesh) として

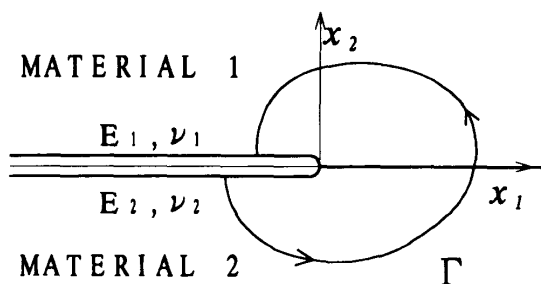


図 11 異種材界面き裂の J 積分

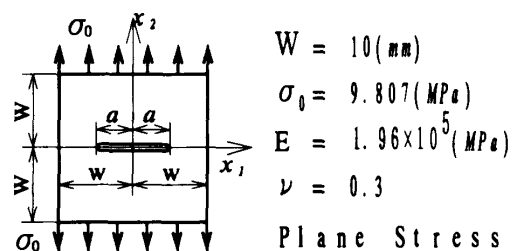


図 12 中央き裂を持つ形板

示したものは、図13の要素分割で図14と同じ位置に積分経路をとって解析した結果である。表1より、要素分割を粗くした例でも応力拡大係数は0.5%以内の高い精度で求められていることがわかる。

4.2.2 異種材界面き裂の応力拡大係数解析結果

次に、異種材界面き裂への本手法の適用性を調べるために、引張りを受ける片側界面き裂板および中央傾斜界面き裂板の応力拡大係数解析を行った。

解析にあたって、き裂端特異境界要素は、変位形(A形)の特異要素を用い、き裂先端から M_1 積分経路までの代表長 r は、き裂先端を含む要素の長さの2から3倍程度にとった。B形のき裂端特異要素についても検討したが、異種材界面き裂の場合、異種材の弾性係数の差が大きくなると、均質体中のき裂のようにき裂

表1 中央き裂をもつ形板($a/W=0.5$)の F_I の解析結果

	#	J-Path		
		Path 1	Path 2	Path 3
Coarse Mesh	A	1.330	1.337	1.329
	B	1.332	1.330	1.331
Usual Mesh	A	1.334	1.334	1.334
	B	1.333	1.333	1.333

: Type of crack tip elements.

Ishida's solution : $F_I = 1.334$ for $a/W = 0.5$.

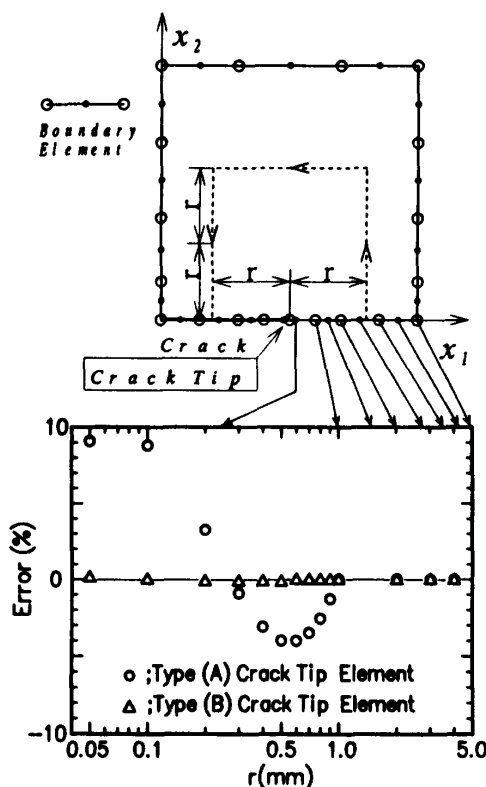


図13 要素分割図およびき裂先端からの J 積分経路の距離と解析値の精度の関係

先端近傍に積分経路をとることができるという特質が失われ、き裂先端の要素長さより r を小さくすると精度が低下するという結果が得られた。

4.2.2.1 片側界面き裂板の解析結果

界面き裂の第一の例として、図15に示すような片側界面き裂板の解析を行った。ポアソン比 $\nu_1=\nu_2=0.3$ 、平面応力状態として、弾性率の比($\Gamma=E_1/E_2$)とき裂長さ(a/W)を変化させて解析を行った。

解析結果は、 $F_I=K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi a})$, $F_{II}=K_{II}/(\sigma_0\sqrt{\pi a})$ のように無次元化した形で整理した。

表2に $\Gamma=10.0$ の場合の解析結果を、同様の解析対象に対して、結城らが解析した結果⁽¹²⁾とともに示す。これより、本手法の解析結果と結城らの解析結果は非常に良く一致している。また、表3にそのほかの Γ に対して解析した結果を示す。これらについても結城らは、解析値を提出しており⁽¹²⁾、本解析結果は $\Gamma=10.0$ の例同様、それらと良く一致している。

表2, 3より、片側界面き裂板が引張りを受ける場合の応力拡大係数は、弾性率の比 Γ の増加に伴ってモードIIの応力拡大係数だけが大きく変化し、モードIの応力拡大係数の変化は小さいことがわかる。

4.2.2.2 中央傾斜界面き裂板の解析結果

次の例として、図16に示すような中央傾斜界面き裂をもち引張りを受ける接合板において、ポアソン比 $\nu_1=\nu_2=0.3$ 、弾性率の比 $\Gamma=E_1/E_2=10$ の場合について、平

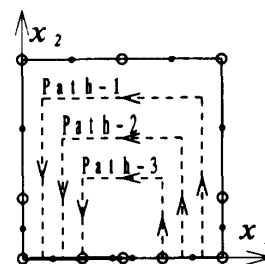


図14 粗い要素分割の例

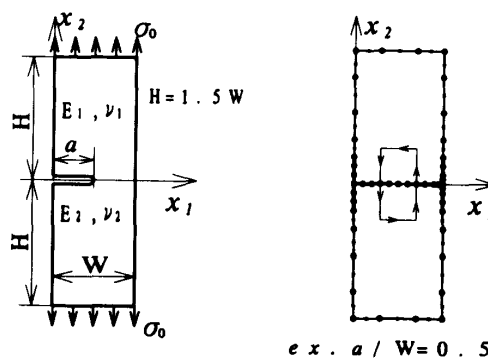


図15 片側界面き裂板の体系図および要素分割の例

表2 片側界面き裂の応力拡大係数 ($\Gamma=10.0$) (上段: F_I , 下段: F_{II})

	a/W								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
Present Solution	1.229 -0.340	1.369 -0.349	1.648 -0.399	2.090 -0.494	2.789 -0.663	3.974 -0.978	6.241 -1.648	11.66 -3.456	33.16 -12.00
Yuuki's Solution	1.220 -0.338	1.367 -0.349	1.646 -0.398	2.088 -0.495	2.788 -0.664	3.966 -0.980	6.229 -1.651	11.59 -3.454	----- -----

表3 片側界面き裂の応力拡大係数 (上段: F_I , 下段: F_{II})

Γ (-)	a/W								
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.0	1.190	1.368	1.661	2.113	2.828	4.042	6.375	12.01	34.84
2.0	1.195 -0.129	1.368 -0.137	1.659 -0.158	2.110 -0.198	2.822 -0.267	4.031 -0.397	6.353 -0.670	11.95 -1.410	34.57 -4.915
3.0	1.203 -0.197	1.368 -0.207	1.656 -0.239	2.105 -0.298	2.814 -0.402	4.017 -0.596	6.326 -1.006	11.88 -2.115	34.22 -7.365
4.0	1.209 -0.239	1.368 -0.250	1.654 -0.288	2.101 -0.359	2.807 -0.483	4.006 -0.716	6.304 -1.208	11.82 -2.538	33.95 -8.830
100.0	1.251 -0.424	1.370 -0.428	1.642 -0.485	2.078 -0.597	2.770 -0.797	3.940 -1.172	6.177 -1.969	11.50 -4.124	32.44 -14.30

表4 中央傾斜き裂の応力拡大係数 ($\Gamma=10.0$) (上段: F_I , 下段: F_{II})

	Left Side Tip of Crack				Right Side Tip of Crack			
	15°	30°	45°	60°	15°	30°	45°	60°
M1-Integral by BEM	1.0115 -0.4434	0.7868 -0.6244	0.5211 -0.6723	0.2770 -0.5804	1.1266 0.0862	0.9910 0.2961	0.7646 0.4056	0.4919 0.4057
VCE-Method by BEM	1.0110 -0.4429	0.7864 -0.6240	0.5210 -0.6720	0.2769 -0.5801	1.1260 0.0865	0.9904 0.2960	0.7643 0.4055	0.4919 0.4056

面応力状態として、き裂傾斜角 (θ) を変化させて解析を行った。解析結果は、中央界面き裂と同様に無次元化して整理し、同様の問題について第1報において、境界要素法と仮想き裂進展法を組合せて解析した結果とともに表4に示す。

表4より、本手法による解析値と、第1報で示した手法による解析値が非常によく一致していることがわかる。このことより、両者の解析値は信頼できるものであると思われる。

5. 結 言

(1) 適応的自動積分を利用することによって、境界要素法における境界近傍の内点の解析精度の低下を防ぐ方法を開発した。

(2) 経路積分法に適応的自動積分法を用いることにより、境界要素法によって高精度の応力拡大係数解析が行える。

(3) 本手法によれば、異種材界面き裂を含めた混合モードき裂の応力拡大係数のモード分離が精度良く行える。

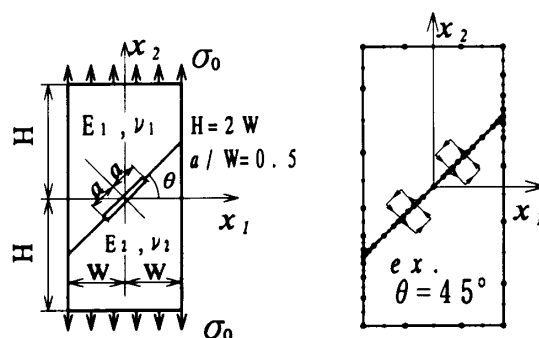


図16 中央傾斜き裂板の体系図および要素分割図の例

付 録

図1に示したような座標系における異種材界面き裂のき裂先端近傍の解における変位の微分形を次式に示す。前報⁽¹⁾に収録した変位の式とともに利用することにより M_I 積分が行える。

$$\frac{\partial(u_1)_j}{\partial x_1} = H \left\{ K_I \left[g_{11}^j \omega_j - \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \theta) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + K_{II} \left[g_{11}^I \omega_j - \frac{1}{\omega_j} \sin(\theta - \Theta) \right] \Big\} \\
\frac{\partial(u_1)_j}{\partial x_2} &= H \left\{ K_I \left[g_{12}^I \omega_j - \frac{1}{\omega_j} \sin(\theta - \Theta) \right] \right. \\
& \left. + K_{II} \left[g_{12}^I \omega_j + \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \Theta) \right] \right\} \\
\frac{\partial(u_2)_j}{\partial x_1} &= H \left\{ K_I \left[g_{21}^I \omega_j - \frac{1}{\omega_j} \sin(\theta - \Theta) \right] \right. \\
& \left. + K_{II} \left[g_{21}^I \omega_j + \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \Theta) \right] \right\} \\
\frac{\partial(u_2)_j}{\partial x_2} &= H \left\{ K_I \left[g_{22}^I \omega_j + \frac{1}{\omega_j} \cos(\theta - \Theta) \right] \right. \\
& \left. + K_{II} \left[g_{22}^I \omega_j + \frac{1}{\omega_j} \sin(\theta - \Theta) \right] \right\} \\
H &= \frac{1}{4\mu_j \sqrt{2\pi r} \cosh(\alpha\pi)} \\
\Theta &= \alpha \ln \left(\frac{r}{2a} \right) + \frac{\theta}{2}, \quad \omega_1 = e^{-\alpha(\pi-\theta)}, \quad \omega_2 = e^{\alpha(\pi+\theta)} \\
g_{11}^I &= \kappa_j \cos \Theta + 2\alpha \sin \theta \cos(\theta + \Theta) \\
& \quad - \sin \theta \sin(\theta + \Theta) \\
g_{11}^{II} &= -\kappa_j \sin \Theta - 2\alpha \sin \theta \sin(\theta + \Theta) \\
& \quad - \sin \theta \cos(\theta + \Theta) \\
g_{12}^I &= \kappa_j \sin \Theta + 2\alpha \sin \theta \sin(\theta + \Theta) \\
& \quad - \sin \theta \cos(\theta + \Theta) + 2 \cos \theta \sin(\theta + \Theta) \\
g_{12}^{II} &= \kappa_j \cos \Theta + 2\alpha \sin \theta \cos(\theta - \Theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin \theta \sin(\theta + \Theta) + 2 \cos \theta \cos(\theta + \Theta) \\
g_{21}^I &= -\kappa_j \sin \Theta + 2\alpha \sin \theta \sin(\theta + \Theta) \\
& \quad + \sin \theta \cos(\theta + \Theta) \\
g_{21}^{II} &= -\kappa_j \cos \Theta + 2\alpha \sin \theta \cos(\theta + \Theta) \\
& \quad - \sin \theta \sin(\theta + \Theta) \\
g_{22}^I &= \kappa_j \cos \Theta - 2\alpha \sin \theta \cos(\theta + \Theta) \\
& \quad - \sin \theta \sin(\theta + \Theta) - 2 \cos \theta \cos(\theta + \Theta) \\
g_{22}^{II} &= -\kappa_j \sin \Theta + 2\alpha \sin \theta \sin(\theta + \Theta) \\
& \quad - \sin \theta \cos(\theta + \Theta) + 2 \cos \theta \sin(\theta + \Theta)
\end{aligned}$$

文 献

- (1) 宮崎, ほか 3 名, 機論, 57-541, A(1991), 2063.
- (2) 森, 数値計算プログラミング, (1986), 187, 岩波書店.
- (3) Chen, F. H. K. and Shield, R. T., *J. Appl. Math. Phys.*, 28(1977), 1.
- (4) Yau, J. F. and Wang, S. S., *Eng. Fract. Mech.*, 20-3(1984), 423.
- (5) Rice, J. R. and Sih, G. C., *J. Appl. Mech.*, 32(1965), 418.
- (6) Sun, C. T., and Jih, C. J., *Eng. Fract. Mech.*, 28-1(1987), 13.
- (7) Willis, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, 19(1971), 353.
- (8) 東町, ほか 3 名, 機論, 51-468, A(1985), 1967.
- (9) 文献(2)の168ページ.
- (10) 石田, き裂の弾性係数と応力拡大係数, (1976), 150, 培風館.
- (11) 田中・田中, 境界要素解析の基礎, (1984), 41, 培風館.
- (12) 結城・曹, 機論, 55-510, A(1989), 340.