

境界要素法と有限要素法の結合解法による 接着継手中の界面き裂の応力拡大係数解析*

池田 徹^{*1}, 宮崎 則幸^{*1}
山下 章^{*2}, 宗像 健^{*1}

Stress Intensity Factor Analyses of an Interface Crack in an Adhesive Joint by Combination of the Boundary Element and Finite Element Methods

Toru IKEDA, Noriyuki MIYAZAKI,
Akira YAMASHITA and Tsuyoshi MUNAKATA

In this paper, a combination of the boundary element method and the finite element method was applied to the stress intensity factor analyses of an interface crack in adhesive joints. The virtual crack extension method was utilized for finite elements allocated around a crack tip to obtain the energy release rate of a crack. The superposition technique proposed by Matos was utilized for the mode separation of the stress intensity factor of the interface crack. We applied the present method not only to a bimaterial plate with a center interface crack, but also to adhesive joints with a center interface crack or a slant interface crack to show the effectiveness of the present method for analyses of an interface crack in a very thin adhesive layer. Furthermore, the fracture toughness of an adhesive joint with an edge crack for various adhesive thicknesses was experimentally determined using the present analytical method. As a result, we obtained a constant fracture toughness regardless of the thickness of the adhesive layer.

Key Words: Boundary Element Method, Finite Element Method, Stress Intensity Factor, Fracture Mechanics, Virtual Crack Extension Method, Interface Crack, Adhesive Joints, Fracture Toughness

1. 緒言

接着構造物や複合材料などの破壊現象の解明は、近年の材料力学の重要なテーマとなっている。しかし、このような破壊は、異種材にはさまれた極めて狭い領域において、しかも、しばしば異種材の界面において発生する。このため、その解析や評価には均質体中の破壊の場合にはなかったさまざまな困難が伴う。

著者らは、これまでの研究において、異種材界面き裂の応力拡大係数の境界要素法を用いた解析法を開発し⁽¹⁾⁽²⁾、混合モード荷重下での界面き裂の静的破壊基準を提案した⁽³⁾。境界要素法は、境界のみの要素分割で解析が行なえることから、有限要素法に対して、要素モデルの作成の容易さや計算時間の面で利点をもっている。しかしながら、非常に細長い形状のモデルを解析する際に、しばしば解析の精度が低下したり、非線形問題の解析では、領域内部の特

異積分を行なわなければならないために、かえって有限要素法よりも長い計算時間を必要とするなどの欠点も有している⁽⁴⁾。境界要素法と有限要素法の結合解法は、解析対象の一部分が非線形性を有するような問題に対して、非線形性が問題となる部分を有限要素で離散化し、その他の部分を境界要素で離散化することによって、計算時間の節約が可能であることが、報告されている⁽⁴⁾。また、著者らもき裂の応力拡大係数解析にこの結合解法を仮想き裂進展法と共に適用し、き裂先端にのみ有限要素を配置することによって、精度の良い解析が行なえることを示した^{(5)~(7)}。

本研究においては、接着構造物中の薄い接着剤層中の、接着剤と被接着物の界面に存在するき裂の応力拡大係数の解析に境界要素法と有限要素法の結合解法を適用した。このような問題に対しては、有限要素法のみで解析すると要素数が非常に膨大になる。また、境界要素法のみを用いたのでは、接着層領域の厚さが非常に薄くなり、この領域の境界要素モデルの形状が極端に偏平になった場合に精度が低下する。これに対して、本研究で用いた、境界要素領域の方程式を有限要素型の平衡方程式に変換して有限要素と結合する等価有限要素型の結合解法では、境界要素領域の

* 原稿受付 平成6年1月31日。

*¹ 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*² 学生員、九州大学工学部。

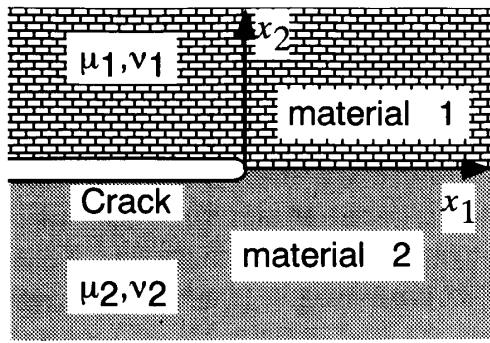


図1 界面き裂周りの座標系

形状が非常に偏平になっても精度の低下が起こりにくかった。

本論文では、中央界面き裂、薄い接着剤層を持つ中央界面き裂の応力拡大係数の解析を境界要素法と有限要素法の結合解法に仮想き裂進展法を適用して行なった結果について述べる。また、接着層の厚さの異なる接着継手の界面き裂の破壊靭性値の測定結果を示す。

2. 異種材界面き裂の応力拡大係数

異種材界面き裂の応力拡大係数の定義は、Erdogan⁽⁸⁾⁽⁹⁾などによって与えられており、図1のようにき裂先端からの距離を定義したとき、 x_1 軸上の複素応力 $\sigma_{22} + i\sigma_{12}$ は次式で示される。

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi x_1}} \left(\frac{x_1}{l_k} \right)^{i\alpha} \quad (1)$$

ここで、 $K_I + iK_{II}$ は、複素応力拡大係数、 α は異種材に関する材料定数で次のように示される。

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \left(\frac{K_1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) / \left(\frac{K_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \right| \quad (2)$$

$$K_j = \begin{cases} 3 - 4\nu_j & (\text{Plane Strain}) \\ (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j) & (\text{Plane Stress}) \end{cases} \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

ここで、 μ_j, ν_j は、各々の材料のせん断弾性係数およびボアソン比である。また、 l_k は、次元をそろえるためのき裂を代表する任意の参照長さであるが、応力拡大係数を比較するには、 l_k の大きさを同じにしなければならない⁽³⁾⁽¹⁰⁾。 l_k を l'_k に変化させると、応力拡大係数 K_I, K_{II} は、次式にしたがって、 K'_I, K'_{II} に変換される⁽³⁾。

$$\begin{pmatrix} K'_I \\ K'_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos Q & -\sin Q \\ \sin Q & \cos Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \end{pmatrix} \quad (4)$$

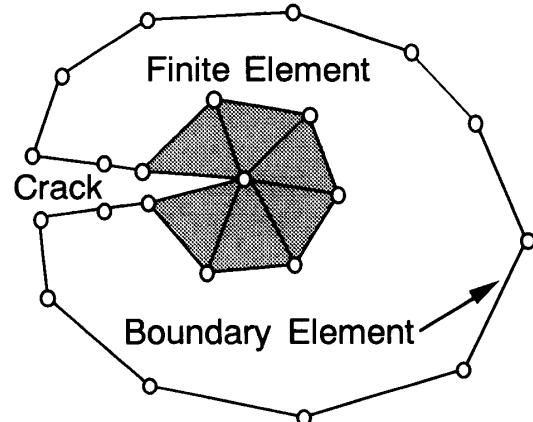


図2 境界要素法と有限要素法の結合解法

$$Q = \alpha \ln \left(\frac{l'_k}{l_k} \right) \quad (5)$$

応力拡大係数の解析を行なう際には、き裂長さなどの単位系によらない代表長さを l_k にとった方が、応力拡大係数を無次元化して整理することが可能になるなど、便利な点が多い。そこで、解析の際には、 l_k をき裂長さなどにとって応力拡大係数を求めておき、破壊靭性値を比較する際には、(4)(5)式を使って統一した l_k での応力拡大係数に変換して用いることが推奨される。

また、図1のようにき裂開口部を左手に見て座標を定義するときに、異種材の材料定数 α が $\alpha \leq 0$ となるように材料1,2が配置されている場合と、 $\alpha > 0$ となるように配置されている場合とでは、き裂周りの応力状態が等しくても K_{II} の符号が反対になる。そこで、本研究では、 K_{II} の符号を一義的に定義するために、き裂開口部を左側に見て、 α が $\alpha \leq 0$ となるように材料1,2が配置されている場合の K_{II} の符号を基準とし、 $\alpha > 0$ の場合には、 K_{II} の符号を反転させることとした⁽³⁾。

3. 解析方法

3・1 結合解法 本研究では、応力解析に境界要素法と有限要素法の結合解法を用いた。すなわち、図2に示すようにき裂先端にのみ有限要素を配置し、その他の部分を境界要素法によって離散化することによって解析を行なった。境界要素と有限要素の結合には、境界要素法の方程式を有限要素型の平衡方程式に変換して有限要素の平衡方程式と結合する、等価有限要素法を用いた⁽¹¹⁾。そして、き裂先端部の有限要素に仮想き裂進展法を適用することによってき裂の応力拡大係数を求めた。

3. 2 仮想き裂進展法 仮想き裂進展法によれば、き裂のエネルギー解放率 G は次式によって求められる⁽¹²⁾。

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_F} (u_i)^T \frac{\Delta k_i}{\Delta a} u_i \quad (6)$$

ここで、 $i=1 \sim N_F$ は、き裂先端を取り囲む有限要素に対しての和をとることを表しており、 u_i は、節点変位ベクトルを、 Δk_i は、要素剛性マトリックスの仮想き裂進展 Δa に対する変化量を示している。このとき、エネルギー解放率 G と界面き裂の応力拡大係数 K_I, K_{II} の間には、次式のような関係がある。

$$G = \beta [K_I^2 + K_{II}^2] \quad (7)$$

$$\beta = \frac{1}{16 \cosh^2(\alpha\pi)} \left[\frac{K_I + 1}{\mu_1} + \frac{K_{II} + 1}{\mu_2} \right] \quad (8)$$

異種材界面き裂の場、荷重条件が单一モードであっても応力拡大係数は、混合モード状態となるためモード分離が必要となるが、(7)式からでは、エネルギー解放率をそれぞれのモードの応力拡大係数に分離することはできない。そこで本手法では、重ね合わせの方法によって応力拡大係数のモード分離を行なう仮想き裂進展法を用いた。この手法は、Yau and Wang⁽¹³⁾によって最初に界面き裂のJ積分法による応力拡大係数の解析に応用され、Matos⁽¹⁴⁾らによって、仮想き裂進展法による界面き裂の解析に拡張された。この重ね合わせの方法では、図3に示すように、解析対象の体系（体系1）にあらかじめ応力拡大係数と応力場がわ

かっている既知の体系（体系2）を重ね合わせる。重ね合わせた結果を体系(1+2)とする。このとき、体系(1), (2), (1+2)の応力場、変位場、応力拡大係数の間には、次式のような重ね合わせの法則が成り立つ。

$$\begin{cases} \sigma^{(1+2)} = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \\ u^{(1+2)} = u^{(1)} + u^{(2)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} K_I^{(1+2)} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)} \\ K_{II}^{(1+2)} = K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \end{cases} \quad (10)$$

このとき、体系(1+2)のエネルギー解放率は、次式で示される。

$$\begin{aligned} G^{(1+2)} &= \beta \left[(K_I^{(1+2)})^2 + (K_{II}^{(1+2)})^2 \right] \\ &= G^{(1)} + G^{(2)} + 2\beta [K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}] \end{aligned} \quad (11)$$

これを整理すると、

$$2\beta [K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}] = G^{(1+2)} - G^{(1)} - G^{(2)} \quad (12)$$

式(12)において、 $\beta, K_I^{(2)}, K_{II}^{(2)}$ および $G^{(2)}$ は、既知である。また、 $G^{(1)}, G^{(1+2)}$ は、仮想き裂進展法により、次式で求められる。

$$G^{(j)} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_F} (u_i^{(j)})^T \frac{\Delta k_i}{\Delta a} u_i^{(j)} \quad (j = 1, 1+2) \quad (13)$$

ここで、状態(2)の既知の解としては、異種材界面き裂のき裂先端近傍の漸近解を用いた。すなわち、この漸近解の応力拡大係数に次のように適当なものを選ぶことにより、応力拡大係数のモード分離が可能となる。

$$(1) K_I^{(2)} = 1, K_{II}^{(2)} = 0 ; \\ K_I^{(1)} = \left\{ G^{(1+2)} - G^{(1)} - G^{(2)} \right\} / 2\beta \quad (14)$$

$$(2) K_I^{(2)} = 0, K_{II}^{(2)} = 1 ; \\ K_{II}^{(1)} = \left\{ G^{(1+2)} - G^{(1)} - G^{(2)} \right\} / 2\beta \quad (15)$$

4. 解析結果

4・1 中央界面き裂の解析 以上のような手法を用いて、図4に示すような中央界面き裂の応力拡大係数を解析

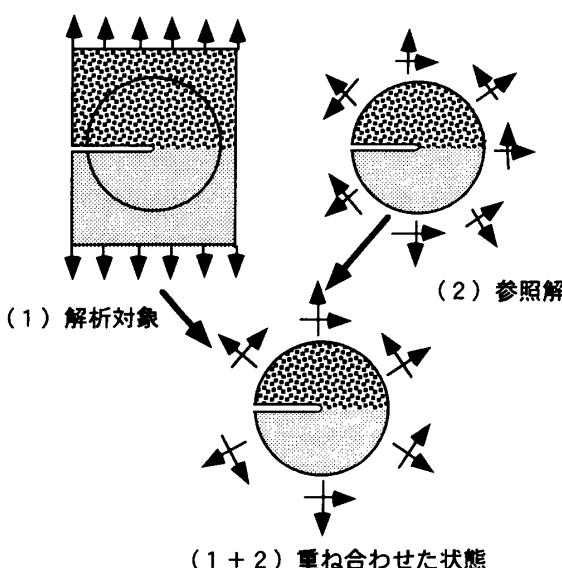


図3 重ね合わせの原理

表1 本手法による中央界面き裂の応力拡大係数の解析結果と参照解との比較

Γ	Mode		a/W								
			0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
10	F_I	Present Solution	0.967	0.986	1.018	1.065	1.134	1.238	1.399	1.683	2.337
		Reference Solution	0.963	0.985	1.018	1.065	1.134	1.238	1.400	1.684	2.339
	F_{II}	Present Solution	-0.173	-0.170	-0.170	-0.173	-0.181	-0.198	-0.229	-0.293	-0.468
		Reference Solution	-0.173	-0.170	-0.171	-0.174	-0.183	-0.199	-0.230	-0.295	-0.472
100	F_I	Present Solution	0.945	0.964	0.994	1.039	1.103	1.200	1.349	1.609	2.209
		Reference Solution	0.940	0.962	0.994	1.038	1.104	1.201	1.349	1.610	2.209
	F_{II}	Present Solution	-0.205	-0.200	-0.199	-0.202	-0.210	-0.227	-0.260	-0.327	-0.514
		Reference Solution	-0.205	-0.201	-0.201	-0.203	-0.211	-0.228	-0.260	-0.328	-0.519

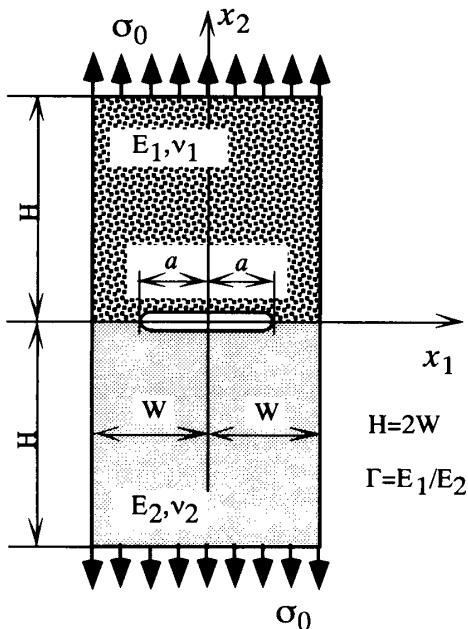


図4 引張りを受ける中央界面き裂をもつ接合板

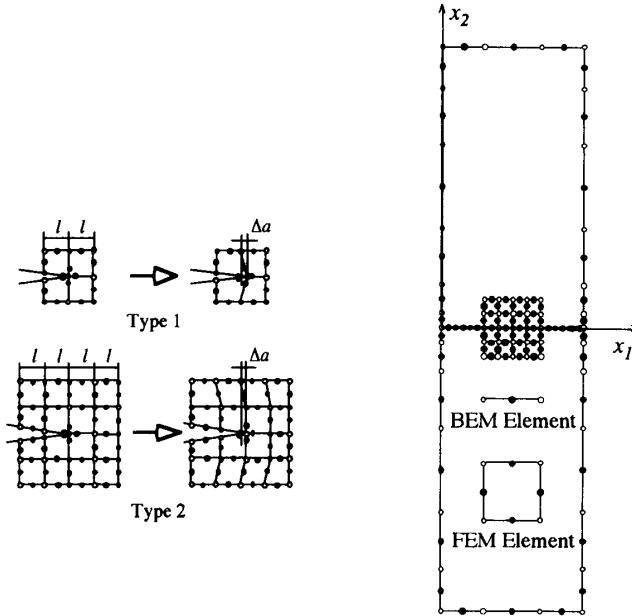


図5 き裂進展方法

図6 要素分割の例

した。解析は、板幅に対する相対的なき裂長さ a/W を 0.1 ～ 0.9 に、材料 1,2 の縦弾性係数の比 $\Gamma (=E_1/E_2)$ を 1, 2, 3, 4, 10, 100 に変化させて行なった。また、 l_k の値としては、応力拡大係数の無次元化を可能とするために $l_k=2a$ とし、解析結果を $F_I = K_I / (\sigma_0 \sqrt{\pi a})$, $F_{II} = K_{II} / (\sigma_0 \sqrt{\pi a})$ のように無次元化した形で整理した。仮想き裂進展の方法としては、図 5 の Type1 のようにき裂先端に接する有限要素のみを変形させてき裂を進展させる方法と Type2 のようにき裂先端の有限要素は変形せずに一つ外側の有限要素を変形させることによってき裂を進展させる二種類の方法を試みたが、Type1 の進展方法では、最大 10% 程度の誤差が生じたため Type2 の進展方法を採用した。図 5 の中のき裂先端の有限要素寸法 l と仮想き裂進展量 Δa の値は、以前の研究^{(5)～(7)}より、倍精度計算において l を $l/a = 0.2$ 以下に $\Delta a/l$ を $10^{-2} \leq \Delta a/l \leq 10^{-12}$ 程度にと

ることにより精度の高い解析が行えることが確認されている。本解析では、有限要素寸法 l をき裂代表長さ a とリガメント長さ $W-a$ の小さい方の 0.2 倍に、仮想き裂進展量 Δa は、 $\Delta a/l$ が 1.8×10^{-8} 前後となるように設定した。要素分割の一例を図 6 に示す。表 1 は、 $\Gamma = 10, 100$ の場合の本手法での解析結果と、同様の問題について結城らが境界要素法に変位外挿法を適用した結果を参照解として示したものである⁽¹⁵⁾。結城らの解析に比べると、本解析はかなり粗い要素分割で行なったが、結果は良好に一致した。

4・2 中央界面き裂をもつ接着継手の解析 つぎに、本手法を用いて図 7 に示すような中央界面き裂をもつ接着継手の解析を行なった。ここで、材料 1 にはアルミニウム、材料 2 には硬質エポキシ樹脂を仮定した。アルミニウムとエポキシ樹脂の材料定数には、表 2 の値を用いた。

表2 材料定数

Material	Young modulus	Poisson's ratio
Aluminum	73.1 GPa	0.32
Epoxy Resin	2.25 GPa	0.38

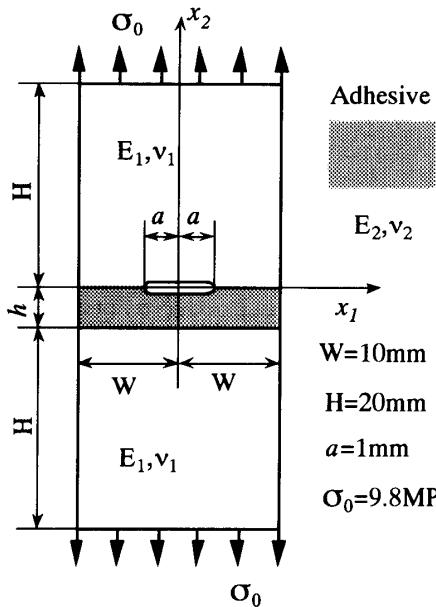


図7 引張りを受ける中央界面き裂をもつ接着継手

図8に接着層厚さを変化させたときの、エネルギー解放率の変化を示した。この図より、 h/W が 10^{-2} 以下では、接着継手の界面き裂のエネルギー解放率は、ほぼ被接着構造物であるアルミニウムの均質体中のき裂のエネルギー解放率に等しいことがわかる。また、図中で○で示したものは、き裂先端にのみ有限要素を配置した要素分割モデルで解析したものであり、●は、接着層全体を有限要素で分割したモデルで解析した結果である。薄い接着層全体を有限要素で分割しても解析の精度が低下しないことより、薄い接着層内の有限要素に材料非線形性を考慮させるなどの今後の応用性が期待できる。図9は、同じく接着層厚さを変化させたときの、 $l_k=0.01\text{mm}$ 基準での応力拡大係数 K_I, K_{II} の変化を示したものである。2章で述べたように、参考長さ l_k の値としては、対象とする系に対して固定した値を統一的に用いる必要があるだけで、その値には何をとっても良いが、界面き裂の混合モード破壊基準についての前報⁽³⁾での研究と統一性を持たせるために $l_k=0.01\text{mm}$ を採用した。また、図10は、応力拡大係数の比 K_{II}/K_I を示している。 K_I が接着層の厚さが薄くなると減少するのに対して、 K_{II} の値は、あまり変化しない。したがって、接着層の厚みが薄くなるにしたがって、モードIIの応力拡大係数の割合が増大

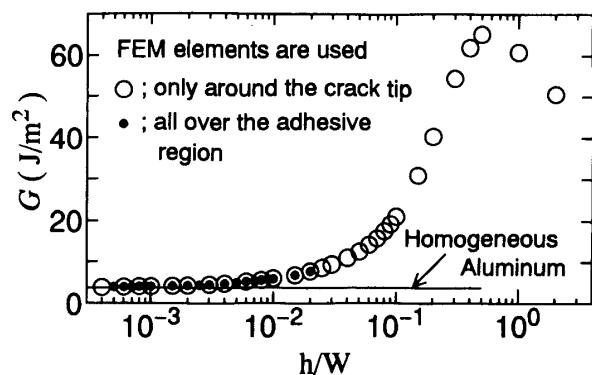


図8 エネルギー解放率の接着層厚さによる変化

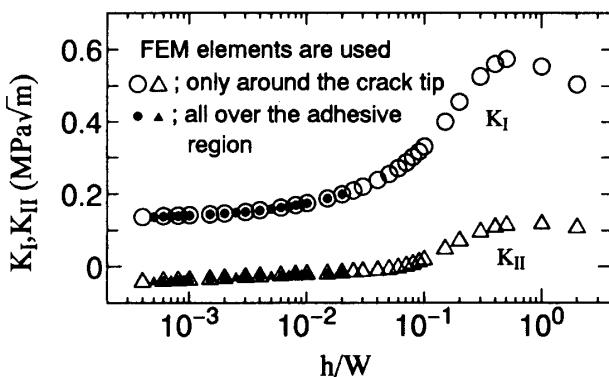


図9 応力拡大係数の接着層厚さによる変化

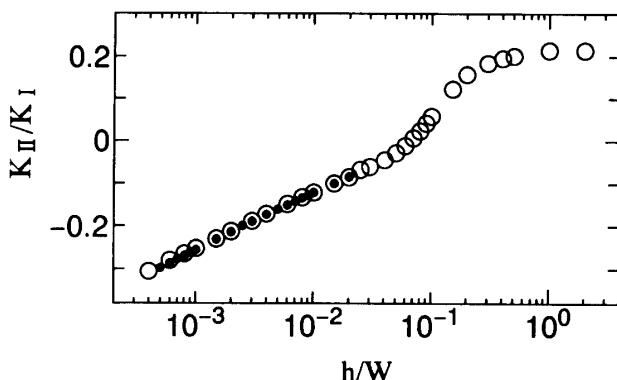


図10 モードI,IIの応力拡大係数の比の接着層厚さによる変化

することがわかる。図9,10においても、○,△は、き裂先端にのみに有限要素を配置した結果を、●,▲は、接着層全体を有限要素で分割した結果を示している。いずれの解析も、き裂先端の有限要素の代表寸法 l を、 $l/a \leq 0.2$ に、仮想き裂進展量 Δa を $\Delta a/l = 10^{-8}$ にとった。エネルギー解放率 G が、接着層厚さが薄くなるにつれて、アルミニウム均質体

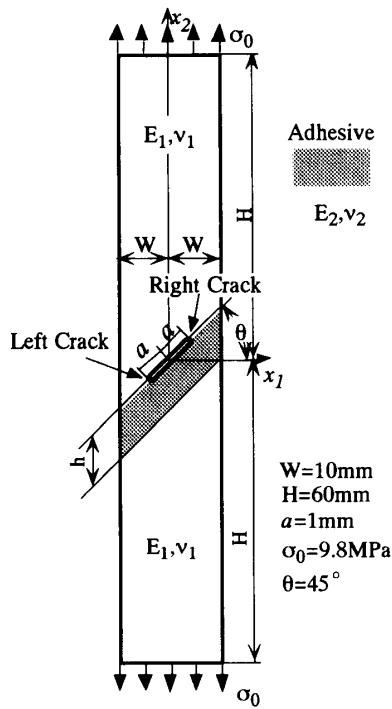


図11 引張りをうける中央傾斜界面き裂板

中のき裂の値に漸近するのに対して、応力拡大係数については、 l_k の取り方によってモード配分が変化するために、均質体中のき裂の応力拡大係数と比較する意味を失う。エネルギー解放率は、き裂進展に伴う体系全体のエネルギー収支を記述するのに対して、応力拡大係数はき裂先端の応力分布を示していると言える。すなわち、接着層の厚みが非常に薄くなった場合の、き裂進展に伴うエネルギー収支は、被接着構造物均質体中のき裂の場合に等しくなるが、き裂先端の微少な領域の応力場は、全く異なったままなのである。

4・3 中央傾斜界面き裂をもつ接着継手の解析 また、図11に示すような中央傾斜界面き裂をもつ接着継手が引張りをうける場合について解析を行なった。ここでも材料1,2には、表2のアルミニウムと硬質エポキシ樹脂を仮定した。図12に接着層厚さを変化させたときの、エネルギー解放率の変化を示した。この図より、左右のき裂先端のエネルギー解放率はほぼ等しく、 h/W が 5×10^{-3} 以下では、ほぼ被接着構造物であるアルミニウムの均質体中のき裂のエネルギー解放率に等しいことがわかる。図13,14 は、接着層厚さを変化させたときの $l_k=0.01\text{mm}$ 基準での左右のき裂先端の応力拡大係数 K_I , K_{II} の変化を示したものである。また、これらの図においても、○,△は、き裂先端にのみに有限要素を配置した結果を、●,▲は、接着層全体を有限要素で分割した結果を示している。ここでも前節と同様に、

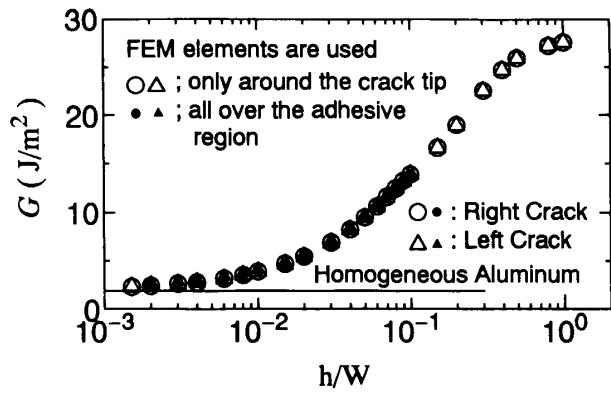


図12 エネルギー解放率の接着層厚さによる変化（傾斜き裂）

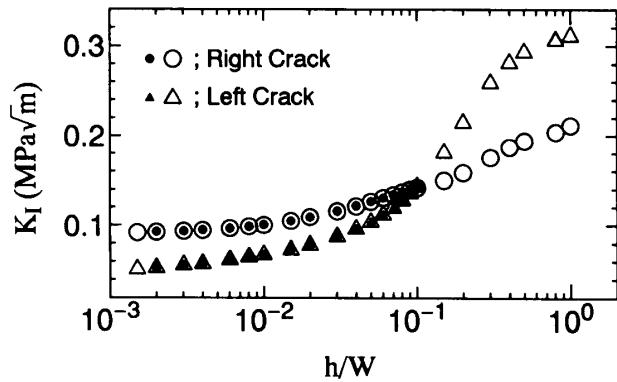


図13 Mode I応力拡大係数の接着層厚さによる変化（傾斜き裂）

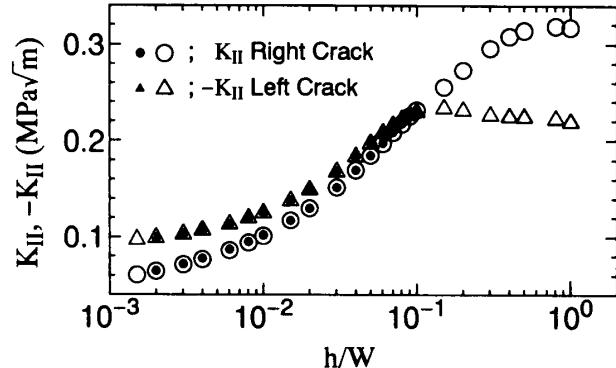


図14 Mode II応力拡大係数の接着層厚さによる変化（傾斜き裂）

き裂先端の有限要素の代表寸法 l を、 $l/a \leq 0.2$ に、仮想き裂進展量 Δa を $\Delta a/l = 10^{-8}$ にとった。

これらより、中央傾斜界面き裂については、左右のき裂先端のエネルギー解放率はほぼ等しいが、応力拡大係数のモードI,IIの分配の仕方が異なっていることがわかる。すなわち、 $l_k=0.01\text{mm}$ としたときの K_I と K_{II} についてみると、 K_I の値は、 h/W が 10^{-1} 以上では左側のき裂が大きく、 10^{-1} 以下では、右側のき裂が大きくなり、 K_{II} の絶対値は、 K_I とは反

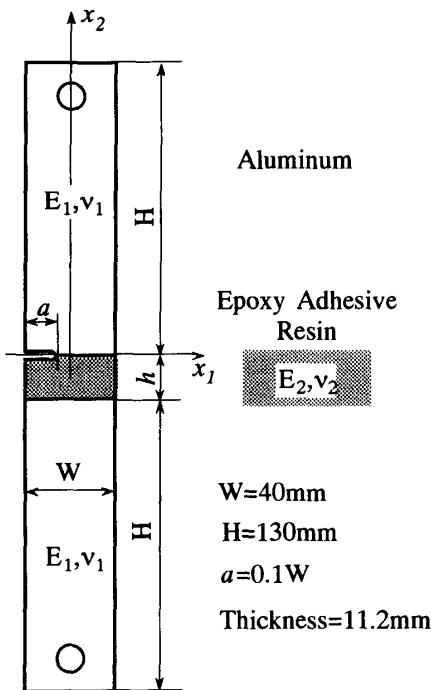


図15 片側界面き裂をもつ接着継手試験片

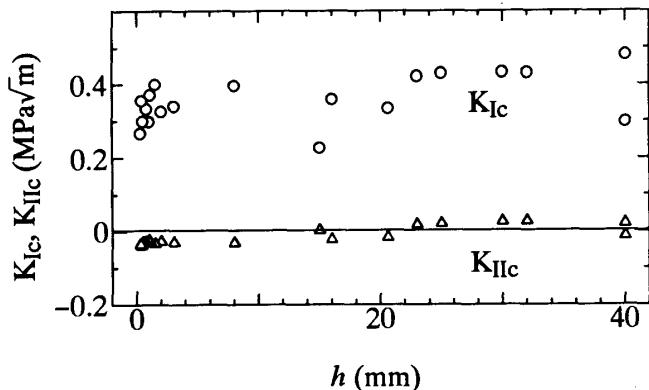


図16 接着剤層厚さによる界面き裂の破壊靱性値の変化

対の変化を示す。著者らの以前の研究⁽³⁾では、アルミニウムとエポキシ接着剤の2層接合材の界面き裂について、 $l_k=0.01\text{mm}$ としたときの混合モード破壊靱性値について、 K_I が K_{II} よりも支配的に働くことが認められた。このことと解析結果より、接着剤層厚さが厚いところでは、左側のき裂先端から、薄いところでは、右側のき裂先端からき裂の進展が開始されることが予測される。

5. 接着継手中の界面き裂の破壊基準

図15に示すような片側界面き裂をもつ接着継手を、作成し、その破壊実験を行なった。ここで、接着層厚さ h は、接着剤層厚さによる破壊靱性値の変化を調べるために $h=0.1\sim40\text{mm}$ に変化させた。また、接着剤と被接着構造物には、表2に示したのと同じ材料定数をもつものを用い、前章の結合解法を用いて、破壊荷重から破壊靱性値を求めた。

図16に接着剤層厚さによる破壊靱性値の変化を示した。この試験片のき裂は界面き裂であるので、荷重形態はモードIであっても応力拡大係数は混合モードとなるが、図16より K_{IIc} の大きさは非常に小さく、ほぼ K_{IC} によって支配されていることがわかる。そして、この図の K_{IC} の接着層厚さに対する分布より、今回用いたような脆性的な性質をもった接着剤の場合、現実的な接着剤厚さの範囲では、接着剤層厚さに無関係な一定の破壊靱性値を示すことがわかった。これは、この破壊試験片の破壊時のき裂先端の塑性域寸法が、接着剤厚さに比べて非常に小さいためと考えられる。およそそのエポキシ樹脂の降伏応力 $\sigma_y=70(\text{MPa})$ と破壊靱性値 $K_{IC}=0.4(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})$ を用いて、均質体中のき裂の平面ひずみ状態での塑性域代表寸法 r_p を求める式次のようになる。

$$r_p = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_y} \right)^2 = 1.7 \times 10^{-6}(\text{m}) \quad (16)$$

この塑性域寸法が接着剤層の厚さと同程度に達すると接着継手の破壊靱性値に影響するとする報告もあり⁽¹⁶⁾、今後、より靱性の高い接着剤の破壊靱性値の接着剤層厚さによる変化を調べる必要があると思われる。

6. 結 言

境界要素法と有限要素法の結合解法に仮想き裂進展法を用いる手法によって、接着継手中の薄い接着層と被着材の界面き裂の応力拡大係数の解析を行なった結果を示した。また、破壊試験により、接着剤層厚さが変化した場合の接着継手中の界面き裂の破壊靱性値を調べた。以下に、結論を述べる。

- (1) 境界要素法と有限要素法の結合解法に仮想き裂進展法を適用する方法によって、異種材界面き裂の応力拡大係数の解析がモード分離も含めて精度良く行なえることがわかった。
- (2) この方法によれば、非常に薄い接着層を有する接着継手における接着層と被接着構造物の界面き裂の応力拡大係数についても精度良く解析できる。
- (3) 接着継手中の界面き裂のエネルギー解放率は、接着

層厚さが非常に薄くなると被接着構造物単体中のき裂のエネルギー解放率に速やかに漸近するが、応力拡大係数については、 K_I と K_{II} の比が変化してゆく。このことは、き裂進展に伴うエネルギー収支が、被接着構造物単体中のき裂に漸近するものの、き裂先端近傍の応力場は、連続的に変化してゆくことを示している。

(4) 脆的な性質をもったエポキシ接着剤を用いて、接着剤層厚さによる接着継手中の界面き裂の破壊韌性値を測定した。その結果、接着剤層の厚さによらず、破壊韌性値は、ほぼ一定値となることがわかった。これは、破壊時の塑性域寸法が、測定した接着剤層厚さに比べて十分に小さいためと考えられる。

なお、長瀬チバ株式会社より、本研究の破壊試験に使用したエポキシ系接着剤（アラルダイト）の提供と試験片作製の指導を受けた。ここに謝意を表する。

参考文献

- (1) 宮崎・ほか3名, 機論, 57-541, A(1991), 2063.
- (2) 宮崎・ほか3名, 機論, 57-544, A(1991), 2903.
- (3) 池田・ほか3名, 機論, 58-555, A(1992), 2080.
- (4) 岸本・ほか4名, 機論, 50-460, A(1984), 1963.
- (5) 宮崎・ほか2名, 機論, 55-509, A(1989), 101.
- (6) 宮崎・ほか2名, 機論, 55-513, A(1989), 1180.
- (7) 宮崎・ほか3名, 機論, 57-534, A(1991), 373.
- (8) Erdogan, F. and Gupta, G., *Int. J. Solids Struct.*, 7(1971), 39.
- (9) Erdogan, F., *Eng. Fract. Mech.*, 4(1972), 811.
- (10) 市川, 機論, 57-538, A(1991), 1346.
- (11) 田中・ほか1名, 境界要素解析の基礎, 培風館, (1984), 194.
- (12) Parks, D. M., *Int. J. Fract.*, 10(1974), 487.
- (13) Yau, J. F. and Wang, S. S., *Eng. Fract. Mech.*, 20(1984), 423.
- (14) Matos, P. P. L., McMeeking, R. M., Charalambides, P. G. and Drory, M. D., *Int. J. Fract.*, 40(1989), 235.
- (15) 結城・曹, 機論, 55-510, A(1989), 340.
- (16) Bascom, W. D., Cottingham, R. L., Jones, R. L. and Peyser, P., *J. Appl. Polymer Sci.*, 19(1975), 2545.