

## ラインスプリングモデルを用いた 異種材界面き裂の動的応力拡大係数の解析\*

宮崎 則幸<sup>\*1</sup>, 池田 徹<sup>\*1</sup>, 宮城 隆文<sup>\*2</sup>

### Dynamic Stress Intensity Factor Analysis of Interface Crack Using Line-Spring Model

Noriyuki MIYAZAKI, Toru IKEDA and Takafumi MIYAGI

In this study, a method for calculating the dynamic stress intensity factor of a bimaterial bending specimen with an interface crack is proposed for the first time by making use of a line-spring model. A precracked bending specimen is modeled by one-dimensional beam finite elements and a line-spring representing the stiffness or compliance of a cracked part. The present method enables the one-dimensional analysis of a two-dimensional crack problem; thus the time variation of dynamic stress intensity factors of a bimaterial bending specimen with an interface crack can be obtained by making use of a personal computer within a few minutes. The results obtained from the present method agree reasonably well with those obtained from the two-dimensional finite element method, although a slight difference in period can be found. The present method enables rapid evaluation of dynamic stress intensity factors. Thus a rapid evaluation system of dynamic fracture toughness of a bimaterial with an interface crack can be achieved by combining an impact test apparatus with a computer program based on the present method which runs on a personal computer.

**Key Words:** Computational Mechanics, Finite Element Method, Fracture Mechanics, Interface Crack, Dynamic Fracture Toughness, Dynamic Stress Intensity Factor, Line-Spring Model

## 1. 緒 言

近年、高機能化、高強度化、軽量化などを狙いとして異種材ないしは複合材が各種分野に利用されており、この異種材の強度および安全性の評価、すなわち破壊靱性値の評価が強く求められている。特に材料の動的破壊靱性値 $K_{Id}$ は静的破壊靱性値 $K_{Ic}$ より低くなることが多いので、衝撃荷重条件下での機器、構造物の安全性の確保、および材料の破壊強度の下限値を与えるものとして重要である。動的破壊靱性値 $K_{Id}$ を求めるには、シャルピー試験機、落重試験機のような衝撃曲げ試験機が用いられることが多い。そこで、本研究ではこの異種材の動的破壊靱性値を、材料試験と有限要素法解析とをハイブリッドした形で求める方法に着目した。この方法は材料試験から得られる荷重時刻歴を用

いて数値解析を行い、その結果得られる動的応力拡大係数に破壊開始時刻を代入することで動的破壊靱性値を求めるものである<sup>(1)(2)</sup>。ただし、本研究ではこのうちの数値解析部分に主眼を置いており、解析手法としては三次元解析を二次元化するのに用いられている動的ラインスプリング法<sup>(3)(4)</sup>を二次元解析に適用する。ラインスプリング法は、き裂部を等価な剛性を持つスプリングで置き換える方法であり、三次元表面き裂の応力拡大係数解析に Rice と Levy<sup>(5)</sup> が最初に適用し、その後、弾塑性き裂の J 積分解析<sup>(6)~(8)</sup>、動的応力拡大係数解析<sup>(3)(4)</sup>に適用され成功を収めている。このラインスプリング法の特徴は、解析の次元を一つ低減できることであり、二次元形状のき裂付き曲げ試験片の動的解析を、ラインスプリングモデルを適用することにより、一次元の動的有限要素解析として取り扱うことができる。以前に著者の一人はき裂付き均質曲げ試験片について、動的ラインスプリングモデルに基づいた解析プログラムを開発し、良好な結果を得て

\* 原稿受付 1995 年 3 月 15 日。

<sup>\*1</sup> 正員, 九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

<sup>\*2</sup> 九州大学大学院。

いる<sup>(9)</sup>。本論文では、これを異種材界面き裂の場合に拡張する。この解析プログラムを用いることにより、材料試験機から取り込んだ試験データを用いてパーソナルコンピュータ上で極短時間に動的応力拡大係数の計算ができるメリットがあり、異種材の動的破壊靱性値 $K_{Id}$ を即時に求めることが可能となる。

## 2. 解析方法

計装化シャルピー試験あるいは計装化落重試験に用いられる衝撃曲げ試験片で、Fig. 1 に示すような長さ $a$ の異種材界面き裂を有するものを解析対象とする。これをはり有限要素を用いてモデル化する。その際、本法ではき裂部にラインスプリングを用いる。すなわち、き裂はこれと等価な剛性を有するスプリングに置き換える。このようにすることにより、次式のような動的問題に対する体系全体の有限要素運動方程式が得られる。

$$M_a \ddot{U} + C \dot{U} + (K + K_s)U = F \quad (1)$$

ここで、 $M_a$  は質量マトリクス、 $C$  は減衰マトリクス、 $K$  は剛性マトリクスである。なお、本解析ではせん断変形を考慮した三節点は要素を用いている。この要素に対する上記の各マトリクスの求め方は参考文献(10)に示されている。 $U$ 、 $F$  はそれぞれ節点変位ベクトル、外荷重ベクトルを表す。 $\dot{U}$ 、 $\ddot{U}$  はそれぞれ速度ベクトル、加速度ベクトルを表す。

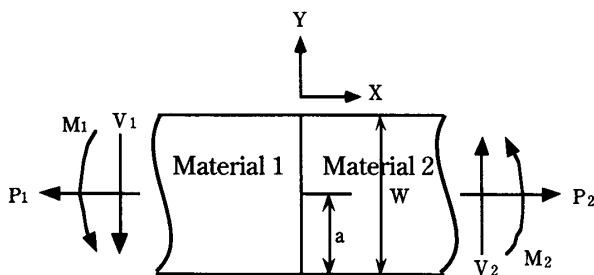


Fig.1 Model for evaluating the stiffness of a line-spring

また、 $K_s$  はラインスプリングの静的剛性を表すマトリクスであり、Fig. 1 に示すモデルにおいて、軸力 $P_1$ 、 $P_2$ 、せん断力 $V_1$ 、 $V_2$ 、曲げモーメント $M_1$ 、 $M_2$ とき裂左側、右側の軸方向変位 $u_1$ 、 $u_2$ 、軸外変位 $w_1$ 、 $w_2$ 、回転角 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ を

$$F_s = K_s u_s \quad (2)$$

と関係づける。ここで $F_s = [P_1 \ V_1 \ M_1 \ P_2 \ V_2 \ M_2]^T$ 、 $u_s = [u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ u_2 \ w_2 \ \theta_2]^T$ である。ラインスプリングの静的剛性 $K_s$ は均質体中のき裂に対するOkamuraら<sup>(11)</sup>、およびTharp<sup>(12)</sup>の方法を異種材界面き裂の場合に拡張する。すなわち、線形弾性体の微小変形では変位は荷重に比例し、重ね合わせの原理が成立するため荷重作用点変位は次式のように表せる。

$$u_i = \sum_{j=1}^6 \lambda_{ij} P_j \quad (3)$$

ここで曲げモーメント $M$ およびせん断力 $V$ が軸力 $P$ の作用点変位 $u$ に影響するとすれば軸力 $P$ の作用点変位 $u$ は

$$u = \lambda_{pp} P + \lambda_{pm} M + \lambda_{pv} V \quad (4)$$

同様に各力がそれぞれの作用点変位に影響を及ぼすとすればせん断力 $V$ および曲げモーメント $M$ の作用点変位 $w$ 、 $\theta$ はそれぞれ

$$w = \lambda_{vp} P + \lambda_{vm} M + \lambda_{vv} V \quad (5)$$

$$\theta = \lambda_{mp} P + \lambda_{mm} M + \lambda_{mv} V \quad (6)$$

また部材に蓄えられるひずみエネルギー $S$ は、

$$S = \frac{1}{2} (uP + wV + \theta M) \quad (7)$$

式(4)～(6)をそれぞれ $P$ 、 $V$ 、 $M$ について求め、式(7)に代入して整理すれば、

$$S = (Au^2 - Bwu + C\theta u - Duw + Ew^2 - F\theta w + Gu\theta - Hw\theta + I\theta^2) / 2 |DD| \quad (8)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A &= \lambda_{vv} \lambda_{mm} - \lambda_{vm}^2 \\ B &= \lambda_{pv} \lambda_{mm} - \lambda_{pm} \lambda_{vm} \\ C &= \lambda_{pv} \lambda_{vm} - \lambda_{pm} \lambda_{vv} \\ D &= \lambda_{pv} \lambda_{mm} - \lambda_{pm} \lambda_{vm} \\ E &= \lambda_{pp} \lambda_{mm} - \lambda_{pm}^2 \\ F &= \lambda_{pp} \lambda_{vm} - \lambda_{pv} \lambda_{pm} \\ G &= \lambda_{pv} \lambda_{vm} - \lambda_{pm} \lambda_{vv} \\ H &= \lambda_{pp} \lambda_{vm} - \lambda_{pv} \lambda_{pm} \\ I &= \lambda_{pp} \lambda_{vv} - \lambda_{pv}^2 \\ |DD| &= \lambda_{pp} \lambda_{vv} \lambda_{mm} + 2 \lambda_{pv} \lambda_{pm} \lambda_{vm} \\ &\quad - \lambda_{pm}^2 \lambda_{vv} - \lambda_{pv}^2 \lambda_{mm} - \lambda_{vm}^2 \lambda_{pp} \end{aligned}$$

さらに、これに節点変位 $u = u_2 - u_1$ 、 $w = w_2 - w_1$ 、 $\theta = \theta_2 - \theta_1$ を代入し、各節点変位に関して偏微分すると

$$P_1 = \frac{\partial S}{\partial u_1} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2|DD|} \left\{ 2A(u_1 - u_2) - 2B(w_1 - w_2) - 2C(\theta_1 - \theta_2) \right\}$$

$$V_1 = \frac{\partial S}{\partial w_1} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2|DD|} \left\{ -2D(u_1 - u_2) + 2E(w_1 - w_2) - 2F(\theta_1 - \theta_2) \right\}$$

$$M_1 = \frac{\partial S}{\partial \theta_1} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2|DD|} \left\{ 2G(u_1 - u_2) - 2H(w_1 - w_2) + 2I(\theta_1 - \theta_2) \right\}$$

$$P_2 = \frac{\partial S}{\partial u_2} = -P_1 \quad (12)$$

$$V_2 = \frac{\partial S}{\partial w_2} = -V_1 \quad (13)$$

$$M_2 = \frac{\partial S}{\partial \theta_2} = -M_1 \quad (14)$$

以上、式(9)～(14)よりスプリングの剛性マトリクス $K_S$ は

$$K_S = \begin{bmatrix} A & -B & C & -A & B & -C \\ & E & -F & D & -E & F \\ & & I & -G & H & -I \\ SYM & & & A & -B & C \\ & & & & E & -F \\ & & & & & I \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、各コンプライアンスはそれぞれ

$$\lambda_{PP} = 2 \int_0^A \left( \frac{G_P}{P^2} \right) dA \quad (16)$$

$$\lambda_{MM} = 2 \int_0^A \left( \frac{G_M}{M^2} \right) dA \quad (17)$$

$$\lambda_{VV} = 2 \int_0^A \left( \frac{G_V}{V^2} \right) dA \quad (18)$$

$$\lambda_{PM} = 2\beta \int_0^A \left( \frac{K_{IP}K_{IM} + K_{IIP}K_{IIM}}{PM} \right) dA \quad (19)$$

$$\lambda_{PV} = 2\beta \int_0^A \left( \frac{K_{IP}K_{IV} + K_{IIP}K_{IIV}}{PV} \right) dA \quad (20)$$

$$\lambda_{MV} = 2\beta \int_0^A \left( \frac{K_{IM}K_{IV} + K_{IIM}K_{IIV}}{MV} \right) dA \quad (21)$$

ただし、

$$\beta = \frac{1}{16 \cos h^2(\alpha \pi)} \left[ \frac{\chi_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\chi_2 + 1}{\mu_2} \right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{\chi_1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) \left( \frac{\chi_2}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \right]$$

$$\chi_j = 3 - 4\nu_j \quad (j = 1, 2)$$

式(16)～(21)で $K_{IP}, K_{IM}, K_{IV}$ は、それぞれ片側き裂付き帯板に軸力 $P$ 、曲げモーメント $M$ 、せん断力 $V$ が作用した時のモードIの応力拡大係数であり、 $K_{IIP}, K_{IIM}, K_{IIV}$ は同じくモードIIの応力拡大係数である。また $G_P, G_M, G_V$ はエネルギー解放率を、 $\alpha, \beta$ は異種材料の組み合わせによって定まる定数を表し、 $\mu_j, \nu_j$  ( $j=1, 2$ )は材料1、2のせん断弾性係数、ポアソン比である。また、 $A$ はき裂面積を示し、き裂長さを $a$ 、板厚を $B$ とすれば、 $dA = B da$ で与えられる。なお、各エネルギー解放率と各応力拡大係数の間には下記の関係がある。

$$G_P = \beta (K_{IP}^2 + K_{IIP}^2) \quad (22)$$

$$G_M = \beta (K_{IM}^2 + K_{IIM}^2) \quad (23)$$

$$G_V = \beta (K_{IV}^2 + K_{IIV}^2) \quad (24)$$

式(16)～(21)を用いて $\lambda_{PP}, \lambda_{MM}, \lambda_{VV}, \lambda_{PM}, \lambda_{PV}, \lambda_{MV}$ を計算するには、片側き裂付き帯板の場合の応力拡大係数およびエネルギー解放率の表示式が必要となる。これらの各表示式は均質材に対してはハンドブック等(13)(14)を参照できるが、本研究では異種材を対象としており、それらの組み合わせが無数に考えられるため参照できる表示式はなく、独自に用意しておく必要がある。そこで境界要素法を用いてこれらの表示式を求めた(15)(16)。すなわち、解析対象である異種材からなる片側き裂付き帯板に、軸力 $P$ 、曲げモーメント $M$ 、せん断力 $V$ がそれぞれ独立に作用する場合の解析を行った。解析は、板幅に対する相対的なき裂長さ $a/W$ を0.1から0.7まで変化させ、さらに各 $a/W$ について材料の縦弾性係数の比を $E_1/E_2 = 1, 2, 5, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100$ と変化させて行い、 $F_{ij} (= K_{ij} / \sigma_j \sqrt{\pi a})$  ( $i=I, II, j=P, M, V$ )という無次元化した形で整理した。 $F_{ij}$ が $a/W$ および $E_1/E_2$ の関数で表されると仮定し、最小二乗法によって式(25)の係数 $C_{kl}$  ( $k=0 \sim 5, l=0 \sim 3$ )を決定した。なお、 $K_{ij}$ の添字の意味について、例えば $K_{IP}$ は、試験片に軸力 $P$ が作用した時のモードIの応力拡大係数を表す。得られた $F_{ij}$ を用いて、応力拡大係数およびエネルギー解放率の表示式として以下に示すような式を用いた。

$$F_{ij}(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^3 C_{kl} \xi^k \eta^l \quad (i = I, II, j = P, V, M) \quad (25)$$

ただし、 $\xi = a/W, \eta = E_1/E_2$ である。

式(1)を時間積分すれば、変位の時間変化が求められる。これから、ラインスプリングに作用する力 $P, M, V$ が求まり、これらを式(26)～(31)に代入すれば、応力拡大係数、エネルギー解放率が決定される。なお、式(1)の時間積分にはNew mark  $\beta$ -1/4法を用いた。

$$K_{ip} = \frac{P}{BW} \sqrt{\pi a} F_{ip}(\xi, \eta) \quad (i = I, II) \quad (26)$$

$$K_{iv} = \frac{V}{BW} \sqrt{\pi a} F_{iv}(\xi, \eta) \quad (i = I, II) \quad (27)$$

$$K_{im} = \frac{6M}{BM^2} \sqrt{\pi a} F_{im}(\xi, \eta) \quad (i = I, II) \quad (28)$$

$$G_p = \beta \pi a \left( \frac{P}{BW} \right)^2 F_p^2(\xi, \eta) \quad (29)$$

$$G_v = \beta \pi a \left( \frac{V}{BW} \right)^2 F_v^2(\xi, \eta) \quad (30)$$

$$G_m = \beta \pi a \left( \frac{6M}{BW^2} \right)^2 F_m^2(\xi, \eta) \quad (31)$$

### 3. 解析結果および考察

衝撃三点曲げを解析対象とする。すなわち、Fig.2に示す界面き裂を有する三点曲げ試験片にFig.3に示すランプ状の動的荷重 $F(t)$ が加わる場合を考えた。材料の組み合わせとしては、ヤング率の比 $E_1/E_2$ が中程度のケース、比較的大きいケース、および比較的小さいケースとして(1)アルミ-エポキシ ( $E_1/E_2=22.2$ ) (2)鉄-エポキシ ( $E_1/E_2=66.4$ ) (3)鉄-アルミ ( $E_1/E_2=2.99$ ) の3ケースについて解析を行った。なお、解析結果は全て汎用有限要素法プログラムMARCによる二次元有限要素法解析と比較した。解析に用いたこれらの材料物性値を表1に示す。

Table1 Material properties

|                             | Iron                | Aluminum            | Epoxy               |
|-----------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| E [MPa]                     | $2.059 \times 10^5$ | $6.895 \times 10^4$ | $3.103 \times 10^3$ |
| $\nu$                       | 0.30                | 0.30                | 0.35                |
| $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ] | $7.860 \times 10^3$ | $2.699 \times 10^3$ | $1.210 \times 10^3$ |

$\rho$  : mass density

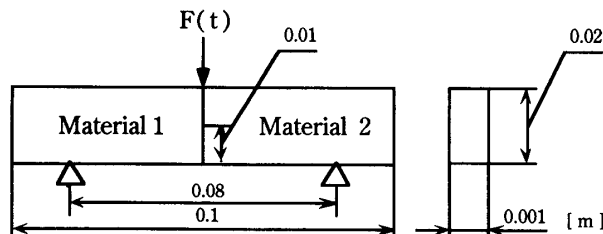


Fig.2 Geometry of a specimen

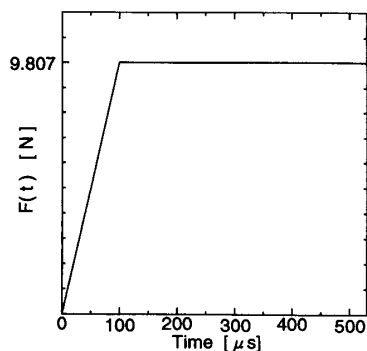


Fig.3 Load-time history

いケースとして(1)アルミ-エポキシ ( $E_1/E_2=22.2$ ) (2)鉄-エポキシ ( $E_1/E_2=66.4$ ) (3)鉄-アルミ ( $E_1/E_2=2.99$ ) の3ケースについて解析を行った。なお、解析結果は全て汎用有限要素法プログラムMARCによる二次元有限要素法解析と比較した。解析に用いたこれらの材料物性値を表1に示す。

また、Fig.4に本法による解析モデルを示す。三点曲げ試験片は20個のはり要素、42節点で表し、き裂部にラインスプリングを置いた。なお、ラインスプリングを置いた点には左右の二つのはり要素の二つの節点が重なり合っている。すなわち、この二つの節点は同じ座標点を持つが、それぞれ独立して変位できるようになっている。Fig.4からわかるように、ラインスプリングモデルを用いれば、本来二次元形状を持つき裂を有する体系を一次元的に取り扱うことができる。なお、本法による解析結果と比較するために行ったMARCプログラムによる二次元有限要素法解析の解析モデルをFig.5に示す。436個の8節点アイソパラメトリック要素を用い、1377個の節点でモデル化した。MARCプログラムによる界面き裂の応力拡大係数解析には変位外挿法<sup>(17)</sup>を用いた。

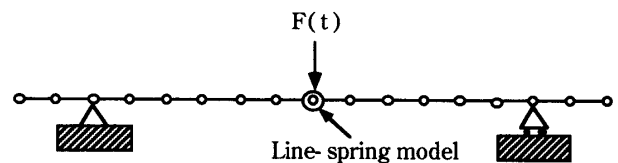


Fig.4 Finite element model for proposed method

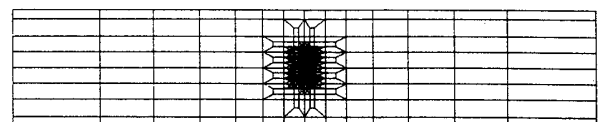


Fig.5 Finite element model for MARC program

各ケースについての応力拡大係数の経時変化 $K_I(t)$ 、 $K_{II}(t)$ をFig.6(a)~(c)にそれぞれ示す。これらの図中で黒丸が今回提案したスプリングモデルの解析結果、白丸が汎用プログラムMARCを用いた二次元有限要素法解析の結果を示す。

これらの図より、ラインスプリング法を用いた本法による解析結果は、MARCプログラムによる解析結果と比べて、いく分早い立ち上がりを示し、周期に差異が認められるものの、ピーク値は良く一致している。両方の解析結果に見られる差異の原因としては、MARCプログラムにより求められた変位を用いて変

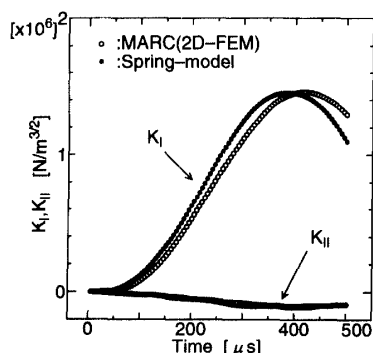
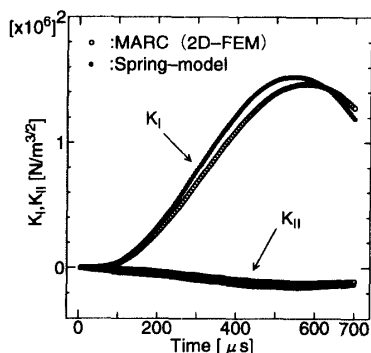
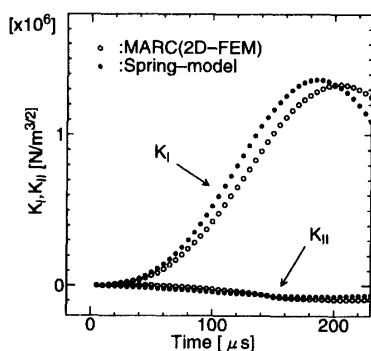
(a) Aluminum-epoxy ( $E_1/E_2=22.2$ )(b) Iron-epoxy ( $E_1/E_2=66.4$ )(c) Iron-aluminum ( $E_1/E_2=2.99$ )

Fig. 6 Time variation of dynamic stress intensity factors

位外挿法を行うときに生じる誤差および本法に固有な誤差が考えられる。後者については、スプリングの剛性に誤差が含まれることに帰因するものが考えられる。

このスプリングの剛性は、先に述べたように計6個のコンプライアンスで表されており、さらにこれらのコンプライアンスは、式(26)～(31)で表される応力拡大係数およびエネルギー解放率の表示式から計算され

るため、スプリングの剛性評価は、直接これらの表示式の精度に影響される。各ケースの場合に、これらの表示式から得られる近似値と、境界要素法解析から得られる値とを比較してみると、鉄-エポキシの場合の  $F_{IIM}$  で、最大誤差3.7%が含まれているのがわかる。他のケースも、表示式から得られる近似値の誤差は1%程度ある。また本解析法は一次元解析であるため、本来二次元的な広がりを持つ応力波が精度良く評価できなかったことなどが考えられる。いずれにせよ、本法による解析結果は高精度解とは言えないものの、工学的に有用なデータとして用いることができる。

#### 4. 結 言

本報では異種材料を対象に、材料の動的破壊靱性試験に用いられる衝撃曲げ試験片の動的応力拡大係数を求めるために、ラインスプリングモデルを用いた解析法を提案した。本解析法を用いれば、界面き裂を有する三点曲げ試験片といった二次元形状を有する試験片を一次元的に取り扱うことが可能となる。本法は一次元解析であるので計算機の使用メモリー、計算時間とも非常に小さくて済み、パーソナルコンピュータで動的応力拡大係数を簡便に求めることができる。ちなみに今回の衝撃三点曲げの解析で NEC PC9801RA を使い、時間きざみを  $1 \mu s$  として  $500 \mu s$  まで解析するのに要した時間は約300秒であった。

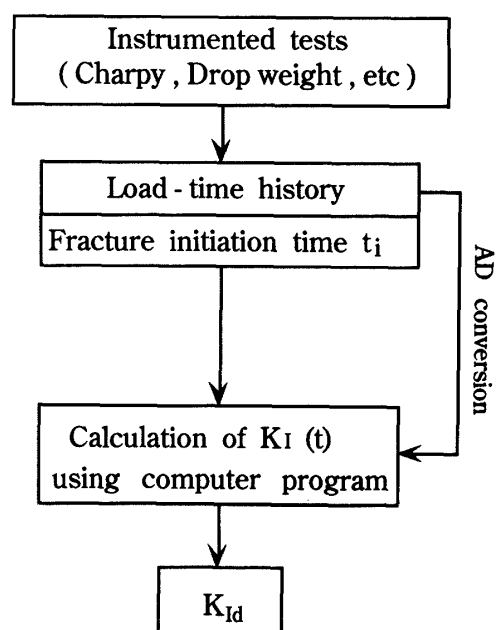


Fig. 7 Rapid evaluation system for dynamic fracture toughness

本法による解析結果は、MARCプログラムによる解析結果と比べて周期に差異は認められるものの、おおむね良く一致していると言える。したがって、本スプリングモデルを用いて異種材界面き裂の動的応力拡大係数の推算を行うことは、工学的に有用であり、本法に基づいた解析プログラムを、計装化シャルピー試験機、計装化落重試験機にFig. 7のように組み込むことにより、動的破壊靱性値 $K_{Id}$ を求めることに適用することができる。すなわち、これらの試験機から試験片に加わる荷重時刻歴と試験片の破壊開始時間 $t_i$ を何らかの方法で求め、前者をAD変換したものを解析プログラムの入力データとして動的応力拡大係数を求め、時刻 $t_i$ におけるその値を求めれば、これが材料の動的破壊靱性値 $K_{Id}$ となる。上記の計算はパーソナルコンピュータにより数分の演算ですむことが期待できるので、試験後直ちに $K_{Id}$ が求められる。

## 文 献

- (1) 青木、岸田、野畑、黒田、坂田、衝撃曲げ試験によるPMMAの動的破壊靱性値の測定、材料、33-368(1984), 555.
- (2) Yokoyama, T. and Kisida, K., A Novel Impact Three-point Bend Test Method for Determining Dynamic Fracture Toughness, Exp. Mech., 29(1989), 188.
- (3) 阿部、棒、坂、動的ラインスプリングモデルによる三次元片側表面き裂の衝撃弾性応答の解析、機論、55-516, A(1989), 1817.
- (4) Miyazaki, N., An Application of a Line-spring Model to a Transient Analysis of the Dynamic Stress Intensity Factor, Int. J. Fract., 39(1989), R77.
- (5) Rice, J. R. and Levy, N., The Part-through Surface Crack in an Elastic Plate, J. Appl. Mech., 39(1972), 185.
- (6) Parks, D. M., The Inelastic Line-spring: Estimate of Elastic-plastic Fracture Mechanics Parameters for Surface-cracked Plates and Shells, J. Press. Vessel Tech., 103(1981), 246.
- (7) Kumar, V. and German, M. D., Studies of Line-spring Model for Nonlinear Crack Problems, J. Press. Vessel Tech. 107(1985), 412.
- (8) Miyoshi, T., Shiratori, M. and Yoshida, Y., Analysis of J-integral and Crack Growth for Surface Cracks by Line Spring Method, J. Press. Vessel Tech., 108(1986), 305.
- (9) Miyazaki, N., Application of Line-spring Model to Dynamic Stress Intensity Factor Analysis of Pre-cracked Bending Specimen, Eng. Fract. Mech., 38(1991), 321.
- (10) Bath, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, (1982), 120, Prentice-Hall.
- (11) Okamura, H., Watanabe, K. and Takano, T., Applications of the Compliance Concept in Fracture Mechanics, ASTM STP536, (1973), 423.
- (12) Tharp, T. M., A Finite Element for Edge-cracked Beam Columns, Int. J. Num. Meth. Eng., 24(1987), 1941.
- (13) Tada, H., The Stress Analysis of Cracks Handbook, (1973), Del Research Corp.
- (14) Murakami, Y., et al., Stress Intensity Factors Handbook, Vol. 1 & 2 (1987), Pergamon Press, Vol. 3(1992), The Soc. Mat. Sci., Japan & Pergamon Press.
- (15) 宮崎、池田、祖田、宗像、境界素法による界面き裂の応力拡大係数解析 (第1報、仮想き裂進展法の適用)、機論、57-541, A (1991), 2063.
- (16) 宮崎、池田、祖田、宗像、境界素法による界面き裂の応力拡大係数解析 (第2報、経路積分法の適用)、機論、57-544, A(1991), 2903.
- (17) 結城、界面の力学、(1993), 102, 培風館.