

仮想き裂進展法による熱応力場での異種材界面き裂の 応力拡大係数解析*

池田 徹^{*1}, 菰原 裕二^{*2}, 宮崎 則幸^{*1}

Stress Intensity Factor Analysis of an Interface Crack between Dissimilar Materials under Thermal Stress Condition by Virtual Crack Extension Method

Toru IKEDA, Yuji KOMOHARA and Noriyuki MIYAZAKI

A new method is presented for stress intensity factor analysis of interface crack problems under thermal stress conditions. The virtual crack extension method, which is used with the finite element method, is a powerful tool for estimation of the energy release rate. The virtual crack extension method is applied to stress intensity factor analyses of thermal interface crack problems. The energy release rate obtained by the virtual crack extension method is separated into individual stress intensity factors, K_I and K_{II} , by the principle of superposition. The presented method is applied to several thermal stress interface crack problems. The results are compared with those obtained by the displacement and stress interpolation methods. It is found from these analyses that the present method gives very accurate results which are insensitive to the size of finite elements.

Key Words: Finite Element Method, Stress Intensity Factor, Fracture Mechanics, Virtual Crack Extension Method, Interface, Thermal Stress

1. 緒 言

異種材界面き裂の応力拡大係数は、異種材界面き裂の定量的評価をする上でエネルギー解放率やJ積分と並んで重要な破壊力学パラメータである。異種材界面き裂では、均質体中のき裂と異なり、単純なき裂開口モードの荷重が負荷された場合でも、き裂先端付近の応力場は常にモードIとIIの混合モード状態にあるため、混合モードの応力拡大係数の評価が必要である。しかしながら、異種材界面き裂の混合モード応力拡大係数を簡易的に評価する方法が無い場合、有限要素法などの数値解析手法を用いる必要がある。有限要素法による異種材界面き裂の混合モード応力拡大係数の解析手法としては、Yau-Wang⁽¹⁾によるJ積分法に重ね合わせの方法を適用した M_I 積分法や、この M_I 積分と同様に仮想き裂進展法に重ね合わせの方法を適用したMatosら⁽²⁾の研究がある。また、境界要素法による解析例として、結城らによる変位外挿法による解析例⁽³⁾や、

著者らによる仮想き裂進展法や M_I 積分法による解析例^(4,5)がある。

異種材界面では、しばしば大きな残留応力が生じているため、これを考慮しなければならない。しかしながら、上述の界面き裂の応力拡大係数解析法は、いずれも熱応力を考慮していない。本研究では、熱応力を考慮した異種材界面き裂の応力拡大係数の解析を行なう数値解析手法を提案する。

2. 異種材界面き裂の応力拡大係数

図1のように、異種材界面き裂の座標系を定義するとx軸上 ($\theta=0$) のき裂先端近傍の応力の漸近解は、次式のよう示される⁽⁶⁾。

$$(\sigma_{xx} + i\sigma_{xy})_{\theta=0} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{l_i} \right)^{i\alpha} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \ln \left[\frac{\kappa_1/\mu_1 + 1/\mu_2}{\kappa_2/\mu_2 + 1/\mu_1} \right] \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\begin{cases} \kappa_i = 3 - 4\nu_i & (Plane\ Strain) \\ \kappa_i = (3 - \nu_i) / (1 + \nu_i) & (Plane\ Stress) \end{cases} \quad \dots\dots\dots(3)$$

* 原稿受付 1996 年 12 月 11 日。

*¹ 正員、九州大学大学院工学研究科 (〒812-81 福岡市東区箱崎 6-10-1)。

*² 九州大学大学院。

ここで、 $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ は、材料 1, 2 それぞれの横弾性係数とポアソン比を示す。 σ_{xx}, σ_{yy} は応力、 K_I, K_{II} は異種材界面き裂のモード I, II の応力拡大係数であり、 i は複素定数 ($i^2 = -1$) である。また、 l_k は、任意の代表長さである。均質体中のき裂の場合、 x 軸上 ($\theta=0$) の垂直応力 σ_{yy} とせん断応力 σ_{xy} の比 σ_{xy}/σ_{yy} は、モード I, II の応力拡大係数の比 K_{II}/K_I と一致する。言い換えると、均質体中のき裂の場合には、 K_{II}/K_I は、き裂先端近傍の応力場の垂直応力とせん断応力の比を特徴づけていると言える。ところが、異種材界面き裂の場合には、 x 軸上 ($\theta=0$) のせん断応力 σ_{xy} と垂直応力 σ_{yy} の比 σ_{xy}/σ_{yy} は、き裂先端からの距離 r によって変化する。式 (1) の偏角をとると次式のようになる。

$$\arg(\sigma_{yy} + i\sigma_{xy}) = \tan^{-1}\left(\frac{K_{II}}{K_I}\right) + \alpha \ln\left(\frac{r}{l_k}\right) \quad (4)$$

式より明らかなように、 σ_{xy}/σ_{yy} が K_{II}/K_I と一致するのは $r=l_k$ のときである。例えば、 $l_k=10\mu\text{m}$ のとき $K_{II}/K_I=1.0$ であれば、 x 軸上のき裂先端からの距離 r の位置での σ_{xy}/σ_{yy} は、図 2 のように変化する。すなわち、 l_k をある値に選ぶということは、応力拡大係数 K_I, K_{II} に $r=l_k$ の距離での垂直応力とせん断応力の比 σ_{xy}/σ_{yy} を代表させることを意味する。

したがって、き裂の進展時における垂直応力とせん断応力の寄与を最も良く特徴付けることができる距離に l_k を選ぶのがふさわしいといえる。このような距離を決定することは困難であるが、ほとんどの材料においてはき裂先

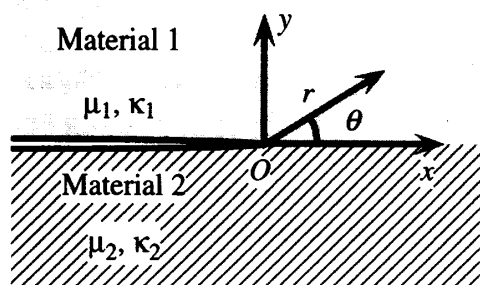


Fig. 1 Coordinates system around an interface crack tip.

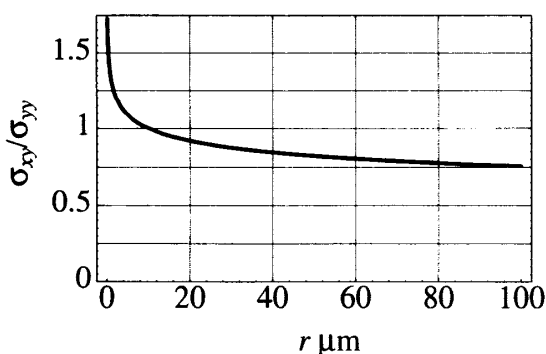


Fig. 2 Variation of the σ_{xy}/σ_{yy} near an interface crack tip along x -axis ($l_k=10\mu\text{m}$, $K_{II}/K_I=1.0$).

端からミクロンオーダーの距離であることは想像できる。以下の実験では、便宜的に $l_k=10\mu\text{m}$ として計算している。また、 l_k を l_k から l'_k に変化した場合の応力拡大係数の変換は次式で示される。

$$\begin{Bmatrix} K'_I \\ K'_{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Q & -\sin Q \\ \sin Q & \cos Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$Q = \alpha \ln\left(\frac{l'_k}{l_k}\right) \quad (6)$$

異種材界面き裂の応力拡大係数を混合モードの破壊靱性値として利用するためには、 l_k が同じ値のときの K_I, K_{II} を用いなければ意味が無い。 K_I, K_{II} が、き裂先端から同じ位置での垂直応力とせん断応力の比を特徴づけるのであれば、比較の対象にならないからである。したがって、異種材界面き裂の応力拡大係数の単位には、必ず l_k の値を $[\text{MPa}\sqrt{\text{m}}, l_k=10\mu\text{m}]$ のように付記する必要がある。また、Rice and Sih は、式 (1) の代わりに、次式のような異種材界面き裂の応力拡大係数の定義を提出している⁽⁷⁾。

$$(\sigma_{yy} + i\sigma_{xy})_{\theta=0} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi r}} r^\alpha \quad (7)$$

このとき、無次元の複素数を Λ 、作用応力を T 、き裂長さ・板幅などの代表長さを L にとると、Rice and Sih の応力拡大係数の次元は、 $\Lambda T \sqrt{L} L^{-\alpha}$ のように示される。これは、応力拡大係数の単位に、例えば $[\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}^{-\alpha}]$ のような複素次元を用いることになり、式 (1) の Erdogan の定義と矛盾していると考えられることもある。また、結城^(3,8)、市川⁽⁹⁾、Sun and Jih⁽¹⁰⁾ らは、応力拡大係数の単位系を変えたときに、 K_I と K_{II} の比が変化することなどから、定義に誤りがあると指摘している。しかし、Rice の式 (7) による定義で $[\text{MPa}\sqrt{\text{mm}}^{-\alpha}]$ と単位を記述することは、式 (1) の Erdogan の応力拡大係数で、 $l_k=1\text{m}$ 、すなわち $[\text{MPa}\sqrt{\text{m}}, l_k=1\text{m}]$ とした場合と同じ意味を示しているにすぎない。したがって、単位を変換した場合に K_I と K_{II} の比が変化するのは、Erdogan の定義で l_k を変化した場合に、式 (5) にしたがって K_I と K_{II} の比が変化するのと同じ理由である。Erdogan と Rice and Sih の定義の違いは、単に単位系の取り方の違い

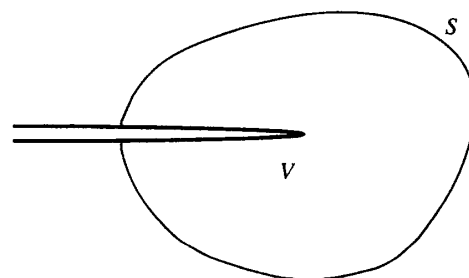


Fig. 3 Domain V and its boundary S surrounding a crack tip.

であり、本質的にはどちらも同じものである。もっとも、応力拡大係数の単位に複素単位を用いることは、不便であるので、Erdogan の式 (1) の定義を用いる方が実用的と考えられる。Rice 自身も後に Erdogan と同じ形の定義を用いることを推奨している⁽¹¹⁾。

また、エネルギー解放率 G と K_I, K_{II} の間の関係は、次式のように示される⁽¹²⁾。

$$G = \beta(K_I^2 + K_{II}^2) \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\beta = \frac{1}{16 \cosh^2(\alpha \pi)} \left[\frac{\kappa_1 + 1}{\mu_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{\mu_2} \right] \quad \dots\dots\dots(9)$$

3. 解析方法

3・1 仮想き裂進展法による熱応力を考慮した J 積分の解析 Parks⁽¹³⁾ による非線形問題に拡張された仮想き裂進展法について簡単に述べる。まず、図 3 に示すようなき裂のポテンシャルエネルギー π は、次式のように示される。

$$\pi = \int_V W(\epsilon_{ij}) dV - \int_S f \cdot u dS \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 W はひずみエネルギー密度関数、 ϵ_{ij} はひずみ、 f は外力、 u は変位であり、 V は領域内部、 S は境界を示す。このとき、き裂長さを a とすると J 積分は、次式で示される。

$$J = - \frac{d\pi}{da} \quad \dots\dots\dots(11)$$

有限要素法の基礎方程式では、ポテンシャルエネルギーは次式のように示される。

$$\begin{aligned} \pi &= \left[\sum_I \int_{V_I} W dV_I \right] - U^T \cdot F(X) \\ &= \left[\sum_I \hat{W}_I(U, X) \right] - U^T \cdot F(X) \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

ただし、

$$\hat{W}_I(U, X) = \int_{V_I} W dV_I \quad \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 U は節点変位、 F は節点荷重、 X は節点座標を示し、添え字 I は各有限要素の量であることを示す。

ポテンシャルエネルギー π の変分をとると、

$$\delta\pi(U, X) = \delta U^T \cdot \frac{d\pi}{dU} + \delta X^T \cdot \frac{d\pi}{dX} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$= \delta U^T \cdot \left[\sum_I \frac{\partial \hat{W}_I}{\partial U} - F \right] + \delta X^T \cdot \left[\sum_I \frac{\partial \hat{W}_I}{\partial X} - \frac{\partial F^T}{\partial X} \cdot U \right] \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここで、式 (15) の右辺第一項は、有限要素法の平衡方程式そのものであるので、

$$\sum_I \frac{\partial \hat{W}_I}{\partial U} - F = 0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

である。したがって、式 (11) より、

$$J \cdot \delta a = -\delta\pi = -\delta X^T \cdot \left[\sum_I \frac{\partial \hat{W}_I}{\partial X} - \frac{\partial F^T}{\partial X} \cdot U \right] \quad \dots\dots\dots(17)$$

また、外力一定ならば

$$\frac{\partial F^T}{\partial X} = 0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

なので

$$J \cdot \delta a = -\delta\pi = -\delta X^T \cdot \sum_I \frac{\partial \hat{W}_I}{\partial X} \quad \dots\dots\dots(19)$$

である。ここで、要素のひずみエネルギー $\hat{W}_I$ は、

$$\hat{W}_I = \int_{V_I} W dV_I = \int_{V_0} W |J| dV_0 \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここで、 $V_0, |J|$ は、それぞれ局所座標およびヤコビアン $|J| = |dV_I/dV_0|$ を示す。よって、

$$\frac{\partial \hat{W}_I}{\partial X} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial W_I}{\partial X} |J| + W \cdot \frac{\partial |J|}{\partial X} \right) dV_0 \quad \dots\dots\dots(21)$$

Parks の示したこの式を基にして熱応力を考慮した仮想き裂進展法を導く。まず、 W は、ひずみ ϵ_{ij} と温度 T の関数なので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X} &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial X} \\ &= \sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial X} + \frac{\partial W}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial X} \quad \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

である。ここで、 σ_{ij} は、応力を示す。式 (22) の右辺第 1 項は、次式のように書ける。

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial X} = \sigma^T \frac{\partial B}{\partial X} U_I \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここで、 σ は、ベクトル形式に書き直した応力、 U_I は要素の節点変位ベクトル、 B はひずみ-変位マトリックスであり、工学ひずみベクトルを ϵ のように記述するとき、

$$\epsilon = B \cdot U_I \quad \dots\dots\dots(24)$$

である。また、弾性工学ひずみベクトルを ϵ_e とすると、熱弾性問題のひずみエネルギー密度関数 W は、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sigma^T \cdot \epsilon_e \\ &= \frac{1}{2} [\epsilon - A \cdot T]^T D [\epsilon - A \cdot T] \quad \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

である。ただし、 D は、弾性マトリックス、 A は線膨張係数マトリックス、 T は初期状態を 0 としたときの温度である。よって、

$$\frac{\partial W}{\partial T} = -A^T \cdot \sigma \quad \dots\dots\dots(26)$$

また、温度 T が要素の節点温度ベクトル T_i と内挿関数マトリックス Φ で次のように近似されるとする。

$$T = \Phi \cdot T_i \quad \dots\dots\dots(27)$$

このとき、

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial T}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial X} = \frac{\partial \Phi}{\partial X} T_i \cdot \frac{\partial X}{\partial X} \quad \dots\dots\dots(28)$$

である。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = B_i \quad \dots\dots\dots(29)$$

とおくと、次式のように示される。

$$\frac{\partial T}{\partial X} = B_i \cdot T_i \cdot \frac{\partial X}{\partial X} \quad \dots\dots\dots(30)$$

一方、形状関数マトリックスが Ψ で示されるとき、

$$\frac{\partial X}{\partial X} = \frac{\partial(\Psi X_i)}{\partial X} = \Psi \frac{\partial X_i}{\partial X} \quad \dots\dots\dots(31)$$

である。アイソパラメトリック要素であれば、 $\Phi = \Psi$ となる。式 (22~31) を式 (21) に代入することにより、次式が得られる。

$$\frac{\partial W_i}{\partial X} = \int_{V_0} \left[\sigma^T \frac{\partial B}{\partial X} U_i + \frac{1}{2} \sigma^T \epsilon_c \frac{\partial J}{\partial X} - [A \cdot \sigma]^T B_i T_i \Psi \frac{\partial X_i}{\partial X} J \right] dV_0 \quad \dots\dots\dots(32)$$

ただし、

$$\begin{cases} \epsilon_c = B \cdot U_i - A \cdot \Psi \cdot T_i \\ \sigma = D \cdot \epsilon_c \end{cases} \quad \dots\dots\dots(33)$$

である。式 (32) を式 (19) に代入することにより、熱弾性

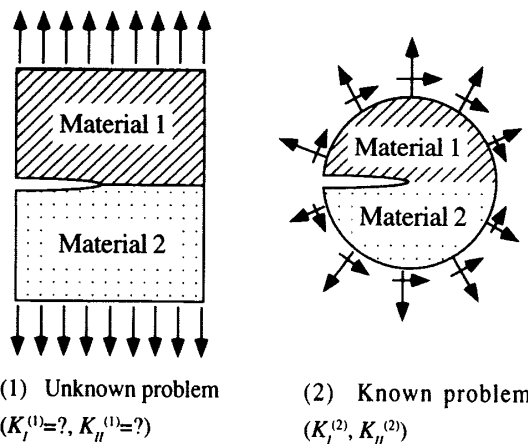


Fig. 4 Superposition of a known problem on an unknown problem.

問題に対する仮想き裂進展法の式が次のように求められる。

$$J = -\frac{1}{\Delta a} \sum \int_{V_0} \left[\sigma^T (\Delta B) U_i + \frac{1}{2} \sigma^T \epsilon_c (\Delta J) - [A \cdot \sigma]^T B_i T_i \Psi (\Delta X_i) J \right] dV_0 \quad \dots\dots\dots(34)$$

ここで、 $\Delta B, \Delta J, \Delta X_i$ は、き裂を仮想的に Δa 進展させる際の、ひずみ-変位マトリックス、ヤコビアン、要素節点座標の変化量である。上式を、次のように第1項と第2項に分けると、第2項が熱弾性問題に対する補正項と見なせる。

$$\text{1st term} = -\frac{1}{\Delta a} \sum \int_{V_0} \left[\sigma^T (\Delta B) U_i + \frac{1}{2} \sigma^T \epsilon_c (\Delta J) \right] dV_0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

$$\text{2nd term} = \frac{1}{\Delta a} \sum \int_{V_0} \left[[A \cdot \sigma]^T B_i T_i \Psi (\Delta X_i) J \right] dV_0 \quad \dots\dots\dots(36)$$

3・2 仮想き裂進展法による異種材界面き裂の応力拡大係数の解析

異種材界面き裂の場合、荷重条件が単一モードであっても、応力拡大係数は混合モード状態となり、モード分離が必要となる。今回開発したプログラムでは、仮想き裂進展法に重ね合わせの方法を適用した Matos ら⁽²⁾の手法を用いた。いま、図4に示すように、解析対象にあらかじめ変位・応力・応力拡大係数が既知な解を重ね合わせを考える。解析対象を状態 (1)、重ね合わせる既知の解を状態 (2)、両者を重ね合わせた状態を (1+2) とすると、状態 (1+2) の任意の点の変位、応力、温度に次のような重ね合わせの法則が成り立つ。

$$\begin{cases} u^{(1+2)} = u^{(1)} + u^{(2)} \\ \sigma_y^{(1+2)} = \sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)} \\ T^{(1+2)} = T^{(1)} + T^{(2)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(37)$$

ここで、 u は、変位ベクトルである。また、応力拡大係数についても次のように重ね合わせの法則が成り立つ。

$$\begin{cases} K_I^{(1+2)} = K_I^{(1)} + K_I^{(2)} \\ K_{II}^{(1+2)} = K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(38)$$

式 (8) と (38) より、状態 (1+2) のエネルギー解放率 $G^{(1+2)}$ は、次式のように示される。

$$\begin{aligned} G^{(1+2)} &= \beta \left[(K_I^{(1+2)})^2 + (K_{II}^{(1+2)})^2 \right] \\ &= G^{(1)} + G^{(2)} + 2\beta \left[K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(39)$$

すなわち

$$2\beta[K_I^{(1)}K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)}K_{II}^{(2)}] = G^{(1+2)} - G^{(1)} - G^{(2)} \quad \dots\dots\dots(40)$$

式 (40) において、左辺の $\beta, K_I^{(2)}, K_{II}^{(2)}$ は、既知である。また、 $G^{(2)}$ も $\beta, K_I^{(2)}, K_{II}^{(2)}$ を式 (8) に代入することにより得られる。また、 $G^{(1)}$ は、節点の温度と、有限要素法によって求めた節点変位を式 (34) の仮想き裂進展法の式に代入することにより得られる。また、 $u^{(2)}, T^{(2)}$ は既知であるので、式 (37) より $u^{(1+2)}, T^{(1+2)}$ を求め、これを式 (34) に代入することにより、 $G^{(1+2)}$ も得ることがができる。したがって、2つの独立な既知の解を、解析対象に重ね合わせるることによって、式 (40) から $K_I^{(1)}, K_{II}^{(1)}$ を求めることができる。

例えば、重ね合わせる既知の解として、異種材界面き裂の漸近解⁽⁶⁾を用いる場合を考える。この漸近解について、 $(K_I^{(2)}=1, K_{II}^{(2)}=0)$ と $(K_I^{(2)}=0, K_{II}^{(2)}=1)$ の場合を重ね合わせると、それぞれを式 (40) に代入することにより、次式から $K_I^{(1)}, K_{II}^{(1)}$ が得られる。

$$\begin{cases} K_I^{(1)} = \frac{G^{(1+2)}_{(K_I^{(2)}=1, K_{II}^{(2)}=0)} - G^{(1)} - G^{(2)}_{(K_I^{(2)}=1, K_{II}^{(2)}=0)}}{2\beta} \\ K_{II}^{(1)} = \frac{G^{(1+2)}_{(K_I^{(2)}=0, K_{II}^{(2)}=1)} - G^{(1)} - G^{(2)}_{(K_I^{(2)}=0, K_{II}^{(2)}=1)}}{2\beta} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(41)$$

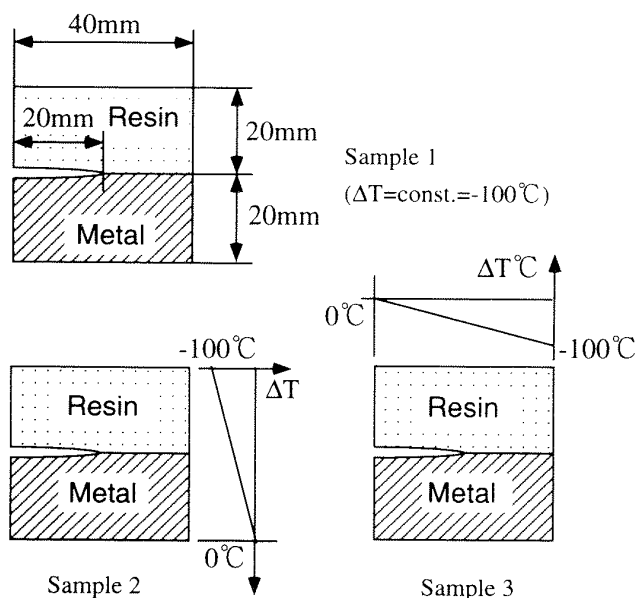


Fig. 5 Sample problems of thermal stress (Edge cracked rectangular plate specimen).

Table 1 Material Properties

Material	Young's Modulus (MPa)	Poisson's Ratio	Coefficient of Linear Expansion (1/°C)
Resin	22	0.25	1.0×10^{-5}
Metal	150	0.25	0.5×10^{-6}

4. 解析精度の検討

3章で述べた解析手法の精度を検討するために、図5に示すように、片側き裂をもつ矩形板 (Edge Cracked Rectangular Plate; ECP 試験片) が3種類の異なった熱分布 (Sample 1; 一様に冷却, Sample 2; 左右に冷却温度の勾配をもつ, Sample 3; 上下に冷却温度の勾配をもつ) を与えられる問題を考える。有限要素法解析は、8節点アイソパラメトリック要素を用いて、平面ひずみの線形熱弾性問題として行った。また、要素分割の精粗が解析値に及ぼす影響を調べるために、図6に示すように Mesh 1 から Mesh 4 ま

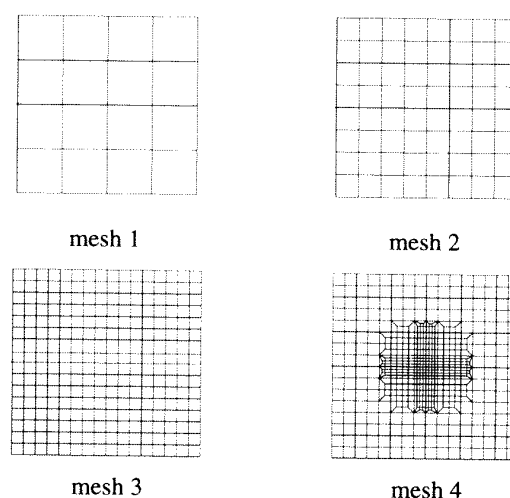


Fig. 6 Finite element meshes for an edge cracked rectangular plate.

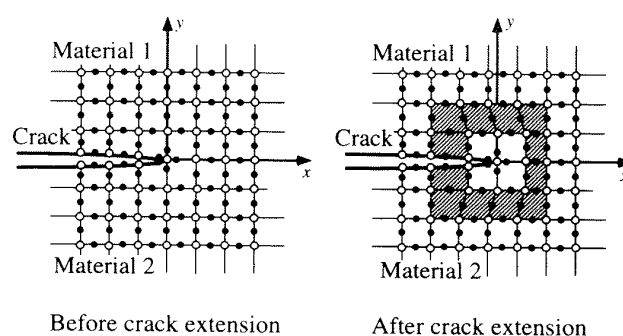


Fig. 7 Distorted finite elements around a crack tip for crack extension.

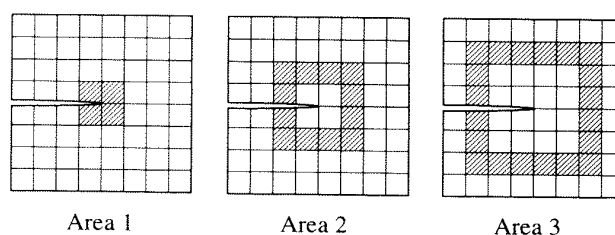


Fig. 8 Areas of distorted elements for crack extension.

での4種類の要素分割を用いた。それぞれの有限要素数は、16, 64, 256, 564 である。実際に、式 (34) からエネルギー解放率を計算するにあたっては、有限要素の節点を移動して仮想的にき裂を進展させる必要がある。この際の仮想き裂進展量 Δa は、倍精度計算において、き裂長さの約 10^4 倍以下で、変形させる要素の約 10^{10} 倍以上にとれば良いことが経験上わかっている。あまり進展量が大きいと差分近似が成り立たなくなると精度が低下し、極端に進展量が小さいと計算時に桁落ちが生じてしまうので、変形させる有限要素の1辺の長さの 10^{-8} 倍程度に取ることが推奨される。また、仮想き裂進展のための有限要素の節点の移動方法としては、図7のように、き裂先端に接する有限要素は変形させずに剛体的に移動させ、その周囲の斜線部の有限要素を変形させた方が、き裂先端に接する有限要素を変形させる場合より高い精度が得られる。式 (34) の計算において、斜線部の外側の要素については0となるため、斜線部の内側の要素についてのみ計算を行えば良い。また、解析精度の比較のために変位外挿法と応力外挿法によっても計算を行った。変位外挿法は、熱応力が作用するような問題には、

厳密には適用できない。ただし、き裂先端のごく近傍では、熱膨張による変位がき裂面の変位に比べて相対的に非常に小さくなるため、ある程度の精度が得られることは期待できる⁽¹⁴⁾。変位外挿法の式を次に示す⁽⁸⁾。

$$\begin{cases} K_I = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = C\sqrt{1 + 4\alpha^2} \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} / \sqrt{r/2\pi} \\ K_{II}/K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (1 - \delta_x/\delta_y) / (\delta_x/\delta_y + H) \\ H = (\tan R - 2\alpha)/(1 + 2\alpha \tan R) \\ C = 2\cosh(\alpha\pi)/[(\kappa_1 + 1)/\mu_1 + (\kappa_2 + 1)/\mu_2] \\ R = \alpha \ln(r/l_k) \end{cases} \quad (42)$$

また、応力外挿法は、次式で示される⁽⁸⁾。

$$\begin{cases} K_I = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2)} \\ K_{II}/K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{xy}/\sigma_{yy} - \tan R) / (1 + \tan R \cdot \sigma_{xy}/\sigma_{yy}) \end{cases} \quad \dots\dots(43)$$

ここで、 δ_x, δ_y は、上下のき裂面の y 方向と x 方向の相対変位を示す。

まず、図5の Sample 1 の一様冷却温度の条件に対して、図6の Mesh 2 を用い、仮想き裂進展法においてき裂を仮想進展させるために変形する有限要素の領域を図8の Area 1, 2, 3 のように設定した場合の解析結果を表2に示した。ここで、 K_I, K_{II} は、熱応力問題に対する仮想き裂進展法の式 (34) と、重ね合わせの方法によるモード分離の式 (41) を用いて求め、 K_I は、式 (34) より求めたエネルギー解放率 G から、式 (8) (9) を用いて直接求めた。Table 2 より、 K_I については、Area 1, 2, 3 のいずれでもほぼ等しい値が得られているが、応力拡大係数を K_I と K_{II} に分離した結果は、Area 2 と Area 3 の結果がほぼ等しく Area 1 の結果は、それから数%離れている。これは、Area 1 のようにき裂先端に接する要素を変形させると、精度の悪いき裂先端に近接する節点の変位を、直接既知の解との重ね合わせに使用することになるため、解析精度が低下するためと思われる。この例に限らず、き裂先端に接する要素より外側の要素を変形させてき裂を進展させれば、ほぼ等しい解析値が得られた。以下の解析結果では、数種類の要素変形領域を設定し、得られた結果がほぼ等しいことを確認した上で、図8の Area 2 の様にき裂先端に接する要素の一つ外側の要素群を変形させて求めた結果を示している。

図6の4つの mesh を用いて有限要素法解析を行い、仮想き裂進展法と変位外挿法、応力外挿法を用いて求めた応力拡大係数を表3に示した。変位外挿法、応力外挿法による解析は、精度の悪いき裂先端とその次の節点を除いたき

Table 2 Stress intensity factors obtained from three kinds of areas of distorted elements (Sample 1, Mesh 2). (MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$)

Area	K_I	K_{II}	$K_I = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$
Area 1	0.5682	-0.7389	0.9208
Area 2	0.5308	-0.7628	0.9262
Area 3	0.5308	-0.7620	0.9260

Table 3 Numerical results of stress intensity factors for sample 1 ($\Delta T = -100^\circ C$) of the edge cracked plate.

(a) Virtual Crack Extension Method (MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$)

Mesh Type	K_I	K_{II}	$K_I = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$
Mesh 1	0.5401	-0.7649	0.9340
Mesh 2	0.5308	-0.7620	0.9260
Mesh 3	0.5262	-0.7622	0.9250
Mesh 4	0.5246	-0.7593	0.9252

(b) Displacement Extrapolation Method (MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$)

Mesh Type	K_I	K_{II}	$K_I = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$
Mesh 1	0.6321	-0.8297	1.0430
Mesh 2	0.5701	-0.7803	0.9663
Mesh 3	0.5446	-0.7715	0.9443
Mesh 4	0.5292	-0.7685	0.9331

(c) Stress Extrapolation Method (MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$)

Mesh Type	K_I	K_{II}	$K_I = \sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}$
Mesh 4	0.5102	-0.7967	0.9460

裂先端近傍の節点について、式 (42) (43) より計算される近似値が直線性を有する部分での値を使用して外挿した。まず、(a) の仮想き裂進展法による解析結果を見ると、解析値は要素分割の影響をあまり受けずに、安定した結果が得られており、信頼のおける結果であることがわかる。特に、Mesh 3 と Mesh 4 の結果は、非常に良く一致していることから、解析値は、かなりの精度を有していることが予想できる。これに対して、変位外挿法の結果は、要素分割に大きく依存している。また、応力外挿法は、Mesh 1~3

の解析結果から得られた応力では、式 (43) の近似解の直線性が得られず、外挿を行うことができなかったため、Mesh 4 の結果のみを示している。この問題の正解は不明であるが、細かい要素分割での有限要素解析結果に、仮想き裂進展法を適用した結果の精度はかなり高いものと予測される。そこで、Mesh 4 での解析結果に仮想き裂進展法を適用した解析値 (表 2 中に下線で示した) を基準解 (K_I^* , K_{II}^* , K_I^*) として、その他の解析結果の基準解からの誤差 ($(K_I - K_I^*) / K_I^* \times 100\%$, $(K_{II} - K_{II}^*) / K_{II}^* \times 100\%$, $(K_I - K_I^*) / K_I^* \times 100\%$) を計算して、図 9 に示した。図 9 より、仮想き裂進展法の結果が非常に安定しており、図 6 の Mesh 1 のような極端に粗い要素分割でも、Mesh 4 の解析値から、5% 以内の範囲の解析値が得られることが判る。これに対して、変位外挿法の解析値は、要素分割が粗いと非常に精度が悪く、要素分割が細くなるにつれて、基準解に近づいていることが判る。これは、もともと変位外挿法が、粗い要素分割では、精度の良い解析が行えないことに加えて、熱弾性問題には変位外挿法が理論的に適用できないことによるものと思われる。しかしながら、粗い要素分割では、外挿することすらできない応力外挿法よりは、むしろ良い精度で解析が行えると言える。次に図 5 の Sample 2 の上下に温度勾配を設定した場合について、Sample 1 の場合と同様に仮想き裂進展法の Mesh 4 による解析値を基準解とし、各解析値の誤差を図 10 に示した。基準解の値は、 $K_I = 0.3916$ [MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$], $K_{II} = -0.3473$ [MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$], $K_I = 0.5231$ [MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$] である。Sample 1 の場合と同様に、仮想き裂進展法の解析値が圧倒的に安定しており、Mesh 2 で基準解の 1.0% 以内、Mesh 3 では、0.15% 以内の違いしかない。変位外挿法の解析値は、要素分割が細くなるにつれて基準解に近づき、応力外挿法では、Mesh 4 の場合でようやく解が得られる。Sample 1 の場合と異なる点は、変位外挿法の解析値が、Sample 1 の場合よりかなり精度が良く、特に K_I については、Mesh 2 の場合でも、ほぼ基準解に等しくなっている。また、図 5 の Sample 3 の左右に温度勾配を設定した場合についても、仮想き裂進展法の Mesh 4 による解析値を基準解とし、各解析値の誤差を図 11 に示した。基準解の値は、 $K_I = 0.3379$ [MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$], $K_{II} = -0.4351$ [MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$], $K_I = 0.5508$ [MPa $\sqrt{m}$, $l_k = 10\mu m$] である。他の 2 つの例と同様に、仮想き裂進展法の解析値は、Mesh 2 で基準解と 1.0% 以内、Mesh 3 では、0.25% 以内の一致を示している。これに対して、変位外挿法の解析値は、他の 2 つの境界条件の場合に比べて精度が悪く、Mesh 3 の場合でも K_I で基準解と 5% の違いがある。変位外挿法で、Sample 2 の場合が比較的精度が高く、Sample 3 の場合に非常に精度が悪くなるのは、き裂面上で温度変化がある方が、熱ひずみがき裂開口変位に与える影響が大きいためではないか

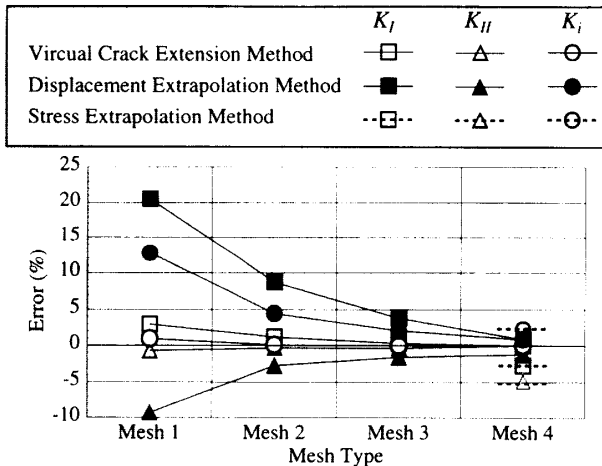


Fig. 9 Error of stress intensity factor obtained by each mesh and scheme from the standard value in the case of sample 1.

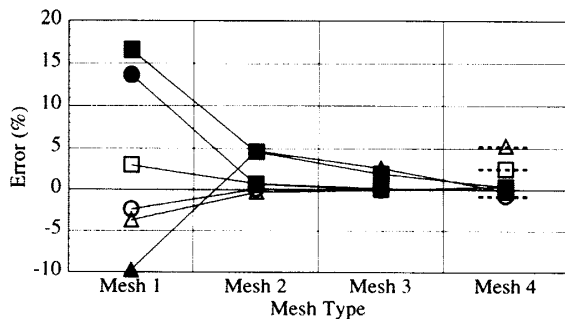


Fig. 10 Error of stress intensity factor obtained by each mesh and scheme from the standard value in the case of sample 2.

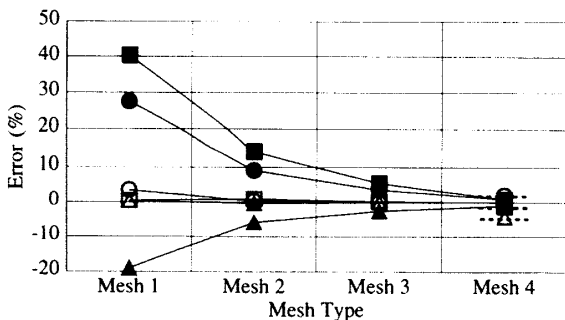


Fig. 11 Error of stress intensity factor obtained by each mesh and scheme from the standard value in the case of sample 3.

と推定される。Sample 3 の場合の応力外挿法の精度は、他の 2 例と同程度であるが、やはり変位外挿法よりかなり劣っている。

5. 結 言

有限要素法に熱ひずみ問題に適用できるよう改良した仮想き裂進展法と重ね合わせの方法を適用して、熱応力が存在する異種材界面き裂の応力拡大係数を解析する手法を開発し、その解析精度について検討した。その結果以下の結論を得た。

- (1) 仮想き裂進展法と重ね合わせ法を用いた本手法は、熱応力下の異種材界面き裂の応力拡大係数の解析に非常に有効であることが判った。本手法によれば、粗い要素分割でも、かなり精度の良い応力拡大係数を得ることができる。
- (2) 変位外挿法では、熱ひずみの寄与を考慮していないため、粗い要素分割では、非常に精度が低下する。しかし、細かな要素分割を用いて、き裂先端近傍の変位を用いれば、ある程度の精度で解析が行える。
- (3) 応力外挿法は、原理的には熱応力問題に適用可能であるが、細かな要素分割を用いなければ解を得ることができず、その精度も変位外挿法よりさらに劣る。これは、変位型有限要素法では、変位に比べて応力の精度が低く、き

裂先端付近の応力を精度良く求めるために非常に細かな要素分割を必要とするためであると考えられる。

文 献

- (1) Yau, J. F. and Wang, S. S., Eng. Frac. Mech., **20-3** (1984), 423-432.
- (2) Matos, P. P. L., McMeeking, R. M., Charalambides, P. G. and Drory, M. D., Int. J. Frac., **40** (1989), 235-254.
- (3) 結城, 曹, 機論, **55-510**, A(1989), 340-347.
- (4) 宮崎, 池田, 祖田, 宗像, 機論, **57-541**, A(1991), 2063-2069.
- (5) 宮崎, 池田, 祖田, 宗像, 機論, **57-544**, A(1991), 2903-2910.
- (6) Erdogan, F., Trans. ASME Series E, J. Appl. Mech., **32** (1965), 418-423.
- (7) Rice, J. R., and Sih, G. C., Trans. ASME Series E, J. Appl. Mech., **32** (1965), 418-423.
- (8) 結城 編, 界面の力学, 培風館, (1993).
- (9) 市川, 機論, **57-538**, A(1991), 1346-1350.
- (10) Sun, C. T., and Jih, C. J., Engng. Fract. Mech., **28** (1987), 13-21.
- (11) Rice, J. R., Trans. ASME Series E, J. Appl. Mech., **55** (1988), 98-103.
- (12) Malyshev, B. and Salganik, R., Int. J. Fract. Mech., **1** (1965), 114-119.
- (13) Parks, D. M., Proc. 1st Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics (1978), 464-478.
- (14) 白鳥, 于, 王, 高橋, 機講論, **95-4**, (1995), 135-136.