

エレメントフリーガラーキン法の有向グラフによる
節点検索法と非線形クリープ問題への適用*萩原 世也^{*1}, 津 乗 充 良^{*2}, 池 田 徹^{*3}
柴 田 朝 史^{*4}, 宮 崎 則 幸^{*3}, 中 垣 通 彦^{*5}Element Free Galerkin Method Using Digraph
and Its Application to Creep Nonlinear ProblemSeiya HAGIHARA, Mitsuyoshi TSUNORI, Toru IKEDA,
Tomofumi SHIBATA, Noriyuki MIYAZAKI and Michihiko NAKAGAKI

The element free Galerkin method (EFGM) is one of the meshless methods proposed by Belytschko, et. al. in 1994. The EFGM is a new numerical method which is expected to be utilized for many problems of the continuum mechanics and for a tool of the seamless system between the CAD and the CAE instead of the finite element method. The EFGM uses the moving least square interpolation (MLSI) for the functional approximation without elements. However the EFGM needs computational time for searching nodes of the MLSI and needs to be provided the integral domain. In this study, the method of the digraph and the Delaunay tessellation are used for the division of the integral domain and the searching nodes. These techniques are useful for the simplification of the analysis and saving the computational time.

Furthermore, the EFGM has not been applied to nonlinear problems such as elastic-plastic problems or creep ones under elevated temperature. In this paper, the developed EFGM using the method of the digraph and the Delaunay tessellation is applied to creep nonlinear problems. The results obtained from the EFGM agree well with those of the finite element method.

Key Words: Computational Mechanics, Numerical Analysis, Creep, Structural Analysis, Meshless Method, Finite Element Method, Digraph

1. 緒 言

メッシュレス法は有限要素法において必要とされる節点-要素の接続性情報が不要な方法として注目を集め、様々な方法により研究が進められている。節点-要素の接続性情報が不要なため、これまで経験的な要素が強かった解析対象の要素分割を行う必要がなく、この特徴を生かしたシステムとして、CADの外郭データをそのまま使用するCAD-CAEシームレスシステムの中核として採用することを目的として研究がなされている⁽¹⁾⁽²⁾。

NayrolesはDiffuse Element Method⁽³⁾として移動最小自乗法(MLSM)を用いることを提案した。この方法を節点

-要素の接続性情報が不要な方法としてBelytschkoら⁽⁴⁾が改良し、提案したエレメントフリーガラーキン法(EFGM)はメッシュレス法の中でも、有力な数値解析手法のひとつとして注目されている。現在ではEFGMの完全な節点処理とバックグラウンドセルの分割を省略することを目的として、バックグラウンドセルの積分点において積分を行わずに、あらかじめ節点に割り振った重みにより積分を行う節点積分法による解析も試みられている⁽⁵⁾。他では、膜構造の幾何学的非線形問題⁽⁶⁾およびき裂の進展をシミュレートした移動境界の問題⁽⁷⁾への適用、さらに移動最小自乗法に付帯条件をつけたEFGM⁽⁸⁾などの研究もなされている。しかし、有限要素法と比較するとEFGMは計算時間を消費し、計算時間がかかるなどの点も見られる。この大きな原因の一つとして移動最小自乗法での内挿関数作成時の節点検索による時間の消費が挙げられる。この点について本論文では、有向グラフ理論による節点検索法を提案し、EFGM解析を行う。

EFGMのもう一つの注目すべき特徴としては、構造問題において変位の一階微分量であるひずみや応力の連続性を重み関数の選択によって確保できることであ

* 原稿受付 1997 年 11 月 20 日。

^{*1} 正員, 佐賀大学理工学部(☎ 840-8502 佐賀市本庄町 1)。^{*2} 九州大学大学院(☎ 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)。^{*3} 正員, 九州大学大学院工学研究科。^{*4} 九州工業大学大学院(☎ 820-0067 飯塚市川津 680 4)。^{*5} 正員, 九州工業大学情報工学部。

る。これにより非線形問題におけるき裂進展解析の際に経路積分を用いる破壊力学パラメータの精度を向上させることが期待される。このような問題に対してEFGMは有効であると考えられる。

これまで、EFGMの応用においては弾性問題への適用の検討が主に行われており、クリープなどの非線形問題への適用時に生じる問題の検討はなされていない。非線形問題においては増分法で解析を行うことが必要であるため、残差の影響により計算精度に影響が現れることも考えられる。したがって、本論文では、まず非線形問題としてクリープ問題に適用するために、クリープひずみを含む増分型のEFGMの定式化を行い、二次元クリープ問題でのEFGMの適用を試みた。

2. 解析方法

2.1 有向グラフ理論による節点検索の効率化 有向グラフ理論による節点検索の効率化の方法として、初期の節点データから生成させた三角形のメッシュを用いる。この三角形メッシュの生成にはデローニー三角分割法⁹⁾などを用いて自動的に生成させることにより、システムには節点と境界の情報のみを与えることで解析を行うことができる。この三角形メッシュは、内挿関数の作成には使用せず、領域の積分と節点の検索のみに使用する。節点検索には、図1のように三角形のメッシュの節点コネクティビティを用い、節点検索用のテーブルを作成して、効率的な節点検索を行えるようにする。この三角形のメッシュの節点コネクティビティを利用して一つの節点からそのまわりにつながれている節点を記録する単方向リストを作成し、この情報から内挿関数を作成する衛星節点を検索していく。

その一例を図1に示す。積分点を含む三角形上の節点

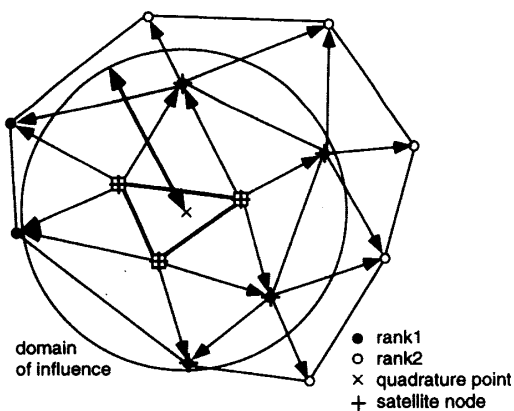
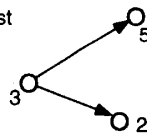


Fig. 1 Searching nodes for moving least square method.

(a) Initial

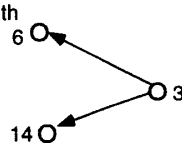
Address	1	2	3	4	...	n
Node Number	1	2	3	4	...	n
Next Address	0	0	0	0	...	0

(b) First



Address	1	2	3	4	...	n	a	b
Node Number	1	2	3	4	...	n	2	5
Next Address	0	0	a	0	...	0	b	0

(c) nth



Address	1	2	3	4	...	n	a	b	...	h	i
Node Number	1	2	3	4	...	n	2	5	...	6	14
Next Address	0	0	a	0	...	0	b	h	...	i	0

Fig. 2 Procedure for registering connections of nodes.

から他の節点を通過せずに到達できる節点群をランク1とする。次に節点を1個通過することにより到達できる節点群をランク2、以下同様にランク3, 4, ...とする。登録の方法は節点検索用のテーブルを作成する。作成の方法は図2に示すように、コンピュータ上の二次元配列につながりをもつ節点番号を追加アドレスに記述し記録していく。たとえば図2において、初期の状態(a)では総節点数の配列を確保しておき、それには節点番号と0を格納しておく。最初の登録(b)では、節点番号3が節点番号2と5である三角形を構成するとする。先頭の節点番号3の最初の配列では0に代わり、aの追加アドレスを入れる。aの追加アドレスでは、2を入れる、次のアドレスの配列にはbのアドレスを入れる。bには5を入れる。そして(c)のn回目に再び節点番号3を含む三角形において節点番号3が先頭になったとき、a, bのアドレス順に検索していき、登録しようとしている節点番号がすでに登録されている節点番号であれば次に進み、登録されていなければ(c)のように登録する。

上記の手続きを行うことにより、任意の節点の隣接節点群情報を登録することができる。節点検索時のランクのカウント法は、上記で作成したテーブルによって隣接節点群を検索する手続きの実行回数によってカウントする。これにより積分点を含む三角形周辺の節点群をランク設定して検索し、この節点群から影響半

径内の節点を検索すると高速に検索することができる。

この方法は、高速に隣接した節点群を結びつけることができるため、これを用いてMLSMに用いる節点を検索することにより、計算時間を短縮できる。

2.2 クリープ非線形問題における増分法エレメントフリーガラキン法の定式化 EFGMの定式化においてクリープひずみは初期ひずみとして扱う。ここで、弾性ひずみ ε^e 、クリープひずみ ε^c が互いに分離可能であると仮定し、全ひずみ ε はこれらの和として以下の式のように定義する。

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c \quad (1)$$

その増分量について以下の式で表す。

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^c \quad (2)$$

式(2)を用いると、EFGMにおける逐次線形化による増分型のエネルギー汎関数は以下のように導かれる。

$$\begin{aligned} \Delta \pi = & \int_V [\sigma^{N-1} + \frac{1}{2}(\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^c)^T : D^e] : (\Delta \varepsilon - \Delta \varepsilon^c) dV \\ & - \int_S (T^{N-1} + \Delta T) \cdot \Delta u dS \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} = & \int_V [\sigma^{N-1T} : B \cdot \Delta q - \sigma^{N-1T} : \Delta \varepsilon^c + \frac{1}{2} \Delta q^T \cdot B^T : D^e : B \cdot \Delta q \\ & - \Delta \varepsilon^c T : D^e : B \cdot \Delta q + \frac{1}{2} (\Delta \varepsilon^c)^T : D^e : (\Delta \varepsilon^c)] dV \\ & - \int_S (T^{N-1} + \Delta T) \cdot N \cdot \Delta q dS \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 σ^{N-1} は前ステップでの応力を表し、 D^e 、 B はそれぞれ応力-ひずみテンソル、ひずみ-変位テンソルを表し、 N は形状関数(近似関数)のテンソル、 Δq は節点変位増分ベクトル、 T^{N-1} 、 ΔT は前ステップでの外力と外力の増分を表す。また、 V 領域、 S は境界を表し、 $(\cdot)$ はテンソル、 $(\cdot)$ はベクトルを表し、 $(\cdot)$ は内積、 $(\cdot)$ は二重内積を表す。

EFGMでは、積分領域内の評価点における形状関数(近似関数)を、評価点から定めた影響半径の領域内に分布する近傍の節点値から、移動最小自乗法(MLSM)⁽³⁾を用いて局所的に作成する。本論文では次式に示す線形基底 $p(\{x\})$ を用いて領域内の任意の評価点 (x, y) での関数 $u^h(\{x\})$ を近似的に表す。

$$p(\{x\})^T = [1, x, y] \quad (5)$$

$$\{x\} = (x, y) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u^h(\{x\}) &= \sum_j p_j(\{x\}) a_j(\{x\}) \\ &= p(\{x\})^T a(\{x\}) \end{aligned} \quad (7)$$

ここでは $m=3$ である。未定係数 $a(\{x\})$ は、次式で定義される評価関数 J を最小化させるように決定する。

$$J = \sum_n w(\{x\} - \{x_I\}) [p(\{x_I\})^T a(\{x\}) - u_I]^2 \quad (8)$$

ここで、 n は評価点 x の近傍に位置する節点数であり、 w は重み関数である。重み関数には次式の指数型の関数を用いる⁽²⁾。

$$w_I(d_I) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_I/C)^{2k}} - e^{-(d_{ml}/C)^{2k}}}{1 - e^{-(d_{ml}/C)^{2k}}}, & \text{if } d_I \leq d_{ml} \\ 0, & \text{if } d_I > d_{ml} \end{cases} \quad (9)$$

ここで、 $d_I = |x - x_I|$ 、 $C = \alpha \cdot d_{ml}$ である。ただし、 d_{ml} は図1に示す影響半径であり、積分点を含む三角形を構成する節点同志の最も距離が長い節点間の距離にある係数をかけた値とした。また、 C は重み関数を制御する変数である。ここで $k=1$ とし、 α には任意の値を用いる。この値には0.5程度がよく用いられる。形状関数 N は節点座標値 $\{x_I\}$ から得られる $\phi_I(\{x\})$ より次式のように定められる。

$$N = \begin{bmatrix} \phi_1(\{x\}) & 0 & \phi_n(\{x\}) & 0 \\ 0 & \phi_1(\{x\}) & \cdots & 0 & \phi_n(\{x\}) \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで $\phi_I(\{x\})$ は次式から得らる。

$$\phi_I(\{x\}) = \sum_j p_j(\{x\}) (A^{-1}(x) B(x))_{ji} \quad (11)$$

$A(x)$ 、 $B(x)$ については以下の式より求める。

$$A(x) = \sum_j w_j(\{x\}) p(\{x_I\}) p(\{x_I\})^T \quad (12)$$

$$w_I(\{x\}) = w(\{x\} - \{x_I\}) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} B(x) = & [w_1(\{x\}) p(\{x_1\}), w_2(\{x\}) p(\{x_2\}), \dots, \\ & w_n(\{x\}) p(\{x_n\})] \end{aligned} \quad (14)$$

形状関数を用いて、ひずみ-節点変位マトリックス B は以下の式で表すことができる。

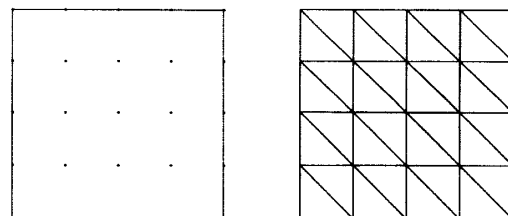


Fig. 3 Node position and background cell in plate for EFGM

$$B = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & \dots & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

また、応力-ひずみ関係 D^e は平面応力の関係式を用いた。

$$D^e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここで、 E は縦弾性係数、 ν はポアソン比を表す。

式(4)において増分型のエネルギー汎関数の変分 $\delta\Delta\pi=0$ とし、以下の増分型のクリープ問題に関するEFGMの剛性方程式が得られる。

$$K\Delta q = F^{N-1} + \Delta F^a + \Delta F^c - R \quad (17)$$

ここで、

$$K = \int_V B^T D^e B dV$$

$$F^{N-1} = \int_S N^T \cdot T^{N-1} dS$$

$$F^a = \int_S N^T \Delta T^{N-1}$$

$$\Delta F^c = \int_V B^T D^e \Delta \epsilon^c dV$$

$$R = \int_V B^T Q^{N-1} dV$$

である。

式(17)をそれぞれ定めた積分領域内で積分を行い、全領域について加算し、式(5)-(16)の関係式を用いて各増分ステップで解くことにより節点変位増分を求めることができ、これらを加算していくことにより節点変位

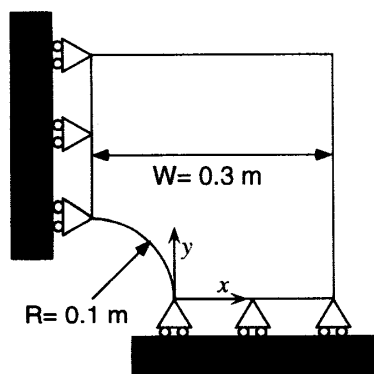


Fig. 4 1/4 model of hole plate under uniform tension.

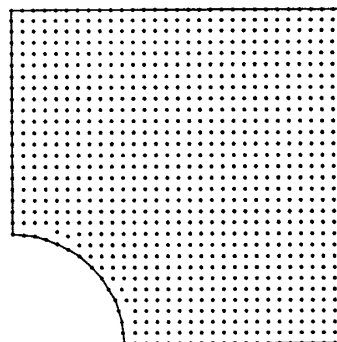


Fig. 5 Regular node allocation for EFGM

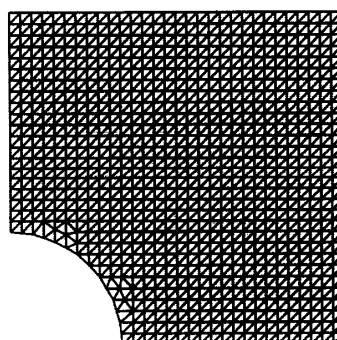


Fig. 6 FEM mesh and background cells of EFGM for regular node allocation.

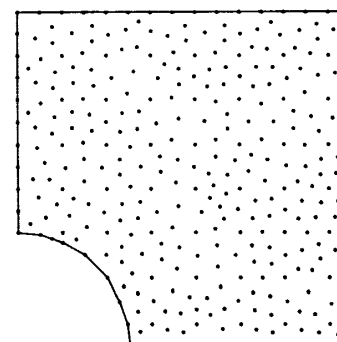


Fig. 7 Delaunay node allocation for EFGM

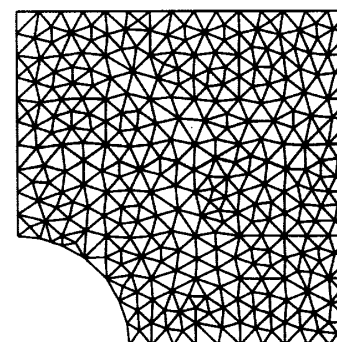


Fig. 8 FEM mesh and background cells of EFGM for Delaunay node position.

Table 1 CPU time for calculation.

Number of Nodes		878	
Method of searching nodes		Usual	Digraph
CPU time [sec]	Making tables	-	0.02
	Searching nodes	41.64	1.96
	other process	39.11	38.54
	total	80.75	40.52

を求めることができる。

領域積分については、Belytschkoら⁽⁴⁾が用いた矩形形状のバックグラウンドセルとは異なり、図3に示すように被積分領域を初期状態でEFGMの節点を連結した三角形に分割したバックグラウンドセルを用いて、この三角形領域内において積分を行った。

基本境界条件については、式(3)の増分型のエネルギー汎関数の変分にペナルティ法による基本境界条件の緩和を行うために、ペナルティ法に関する項を追加し、最終的に増分型の修正エネルギー汎関数の変分により表される以下の式を用いた。

$$\delta\Delta\pi = \delta\Delta\pi + \delta u_j \alpha \int_S \phi_i \phi_j \bar{u}_j dS \quad (18)$$

ここで、 δ 、 $\bar{u}_j$ はそれぞれ変分と既知変位量を表し、また、 α はペナルティ係数であり、通常大きな値をとる。

3. 結果と考察

3.1 有向グラフ理論による節点検索法を用いた計算例

2.1節において記述した有向グラフ理論による節点検索法を用いて行った計算例でのテーブル作成および節点検索、他の計算と全計算の所要時間と節点検索の従来の方法による計算例での所要時間を表1に示す。ここでは878節点の問題を例題とし、従来の方法として比較した方法は文献(2)に示されている方法を採用している。またソルバーについては両方法ともバンドマトリックス法とガウス消去法を採用している。ここで示すように本論文で示した有向グラフ理論を用いた節点検索により大幅に計算時間が短縮されていることがわかる。この方法は、大規模な問題ほど節点検索に消費される時間の減少割合が大きくなると考えられる。

3.2 一様引張りを受ける円孔板の解析例 まず、図4に示す円孔板に20MPaのy方向一定一様な引張り荷重を負荷した場合について、比較的均等な878節点による節点配置（均等節点）と積分領域分割、すなわちバックグラウンドセル分割を行った円孔板の4分の1を図5と

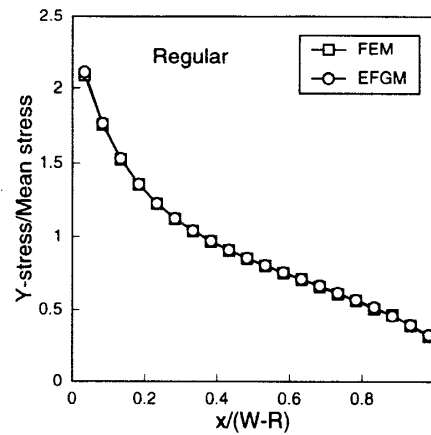


Fig. 9 Distribution of Y-stress normalized by mean stress at middle section of center holed plate for regular nodes.

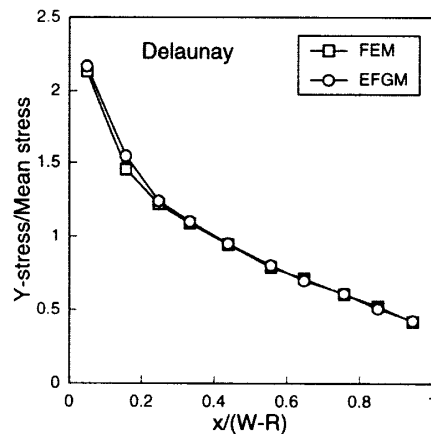


Fig. 10 Distribution of Y-stress normalized by mean stress at middle section of center holed plate for Delaunay nodes.

図6にそれぞれ示す。図7と図8にはデローニー分割に基づく333節点の節点配置（デローニー節点）と積分領域の分割を行った4分の1モデルの円孔板をそれぞれ示す。図9には均等節点の場合の円孔板中央断面のy方向の応力集中の分布を示す。この図において横軸は円孔からの距離であり、縦軸はy方向の垂直応力を円孔中央面を横切る面の平均応力により無次元化した応力である。また、同様の節点配置と要素を用いた有限要素法の解析から得られた応力の分布も同時に示している。数値積分はそれぞれの三角形領域に対し1点積分で解析を行った。通常、上下の引張りを受ける有限円孔板では、円孔の縁で最大の応力集中が生じ、その応力集中係数は円孔の大きさ、板幅により異なるが2.0～3.0の値を取ることがわかっている⁽¹⁰⁾。図9のEFGMの計算結果はその応力集中の様子をよく表しており、円孔付近の応力はこの形状の板の応力集中係数2.3⁽¹⁰⁾に近くに

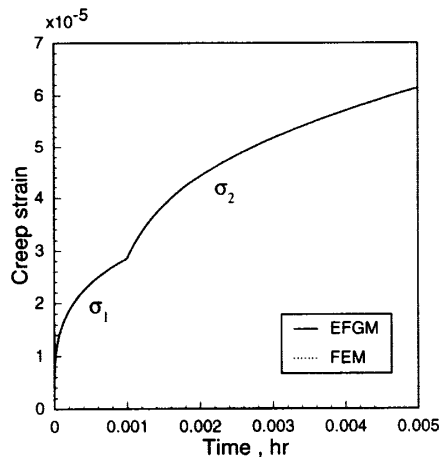


Fig. 11 Creep strain of rectangular plate under varying uniform tension

なっている。また、有限要素法の計算結果とEFGMの計算結果はよく一致していることを示している。また、図10にデローニー節点を用いた場合の応力集中に関する分布図を示す。デローニー節点に対しては図9ほど応力がなめらかではないが、三角形要素を用いた有限要素法の結果も同様の変化が現れており、両者ともほぼ一致した結果が得られている。

3.3 円孔板のクリープ解析例 クリープによる非線形問題の解析例として、まず、図3に示す有限要素法のメッシュとEFGMの節点配置を示す矩形板に引張り荷重を加え非定常の単軸クリープ試験の計算を行った。クリープ構成則には以下のNorton-Baily則を用いた。

$$\epsilon^c = A \sigma^n t^m$$

クリープ係数は以下のものを用いた。

$$A = 1.15 \times 10^{-8} (\text{MPa})^{-2.1} (h)^{-0.27}$$

$$n = 2.1, m = 0.27$$

クリープひずみは初期ひずみとして取り扱い、硬化則にはひずみ硬化則を用いた。図11に $\sigma_1 = 100 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 120 \text{ MPa}$ のように応力が変動する場合におけるクリープ-時間の線図を示す。Norton-Baily則は第一期のクリープ構成則のため、初期のクリープ速度が大きく、その後次第にクリープ速度が低下し、放物線に近い曲線を描く。図11のように応力が変動するとクリープひずみ速度が一時的に増加し、クリープひずみの増加が大きくなる。EFGMの計算結果は有限要素法の非定常クリープの計算結果ともよく一致している。

次に二次元応力状態におけるクリープ現象の解析を行うために、 20 MPa のy方向一定一様引張り荷重を受ける円孔板のクリープ解析を行った。ここでのクリープ構成則には、以下の定常クリープのNorton則を用い、

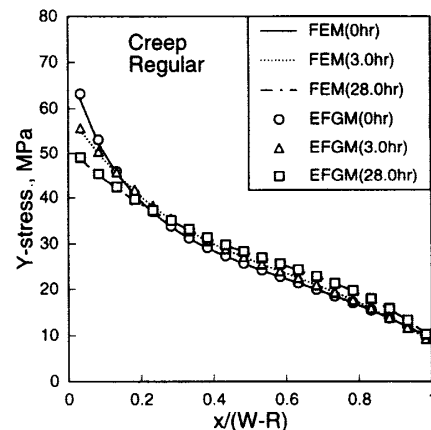


Fig. 12 Y-stress distribution under creep at middle section of center holed plate under constant loading for regular nodes.

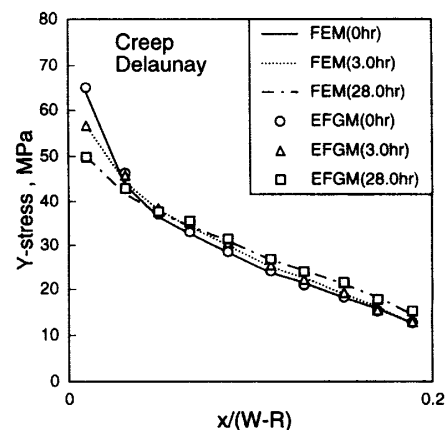


Fig. 13 Y-stress distribution under creep at middle section of center holed plate under constant loading for delaunay nodes.

クリープ係数は以下のものを用いた。

$$\epsilon^c = B \sigma^l t$$

$$B = 1.15 \times 10^{-8} (\text{MPa})^{-2.1} (h)^{-1}, l = 2.1$$

図12には均等節点による解析結果、図13にはデローニー節点による解析結果を示す。図12の均等節点では、EFGM解析による応力のクリープ現象による変化は有限要素法解析による応力の時間変化とほぼ一致している。EFGMも有限要素法の解析結果も時間が経過するにつれ応力が低下している現象が見られ、クリープによる応力緩和が生じていることがわかる。また、デローニー節点の場合は均等節点ほどではないが、有限要素法の計算結果も円孔からの距離に対して滑らかではないので、EFGMと有限要素法の計算結果はよく一致している。

次に、変位を一定に保った場合の均等節点での応力緩和の経過を図14に示し、図15にはデローニー節点による応力緩和の経過を示す。ここで加えた変位は、円

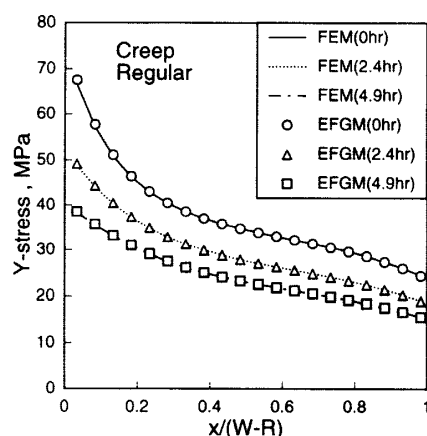


Fig. 14 Y-stress distribution under creep at middle section of center holed plate under constant displacement for regular nodes.

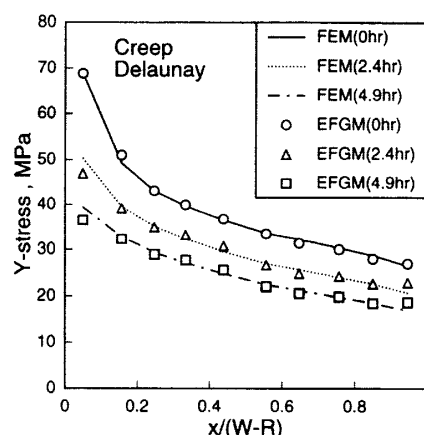


Fig. 15 Y-stress distribution under creep at middle section of center holed plate under constant displacement for Delaunay nodes.

孔板に生じる最大応力が、前述の荷重一定条件の円孔板に生じる最大応力とほぼ同等になるように設定した。この解析結果では、時間による応力緩和現象が前の荷重一定条件によるクリープ現象よりも大きく現れている。EFGMの均等節点、デローニー節点と比較した場合、荷重一定条件のクリープ解析の結果よりもデローニー節点で求めた計算結果は、有限要素法の計算結果に対してやや変動がみられる。しかしどちらの図においても、EFGMと有限要素法の解析結果を比較すると、両者の結果はほぼ一致し、節点配置によらずEFGMは妥当な結果を与えている。

4. 結 言

本論文では、エレメントフリーガラキン法の節点検索の効率化を有向グラフ理論により提案を行い、また、デローニー三角分割法により節点とバックグラウンドセルの生成を行った場合の解析を行った。さらに増分法によるエレメントフリーガラキン法をクリープ非線形問題に適用するために、クリープひずみを含む増分型のエレメントフリーガラキン法の定式化を行い、二次元クリープ問題へのエレメントフリーガラキン法の適用を試みた。

有向グラフ理論による節点検索により、移動最小自乗法の節点検索が高速化され、解析時間が短くなることを示した。

デローニー三角分割法によるバックグラウンドセルの生成を行い、これらの結果が有限要素法の解析結果とほぼ一致することを示した。

これらを適用した増分法エレメントフリーガラキン法によるクリープ非線形問題の解析結果は有限要素法の解析結果とほぼ一致することを示し、エレメントフリーガラキン法がクリープ非線形問題に対して解析手法として有効であることを示した。

5. 文 献

- (1) 奥田洋司, 長島利夫, 矢川元基, エレメントフリーガラキン法に関する基礎的検討 (第1報, 常微分方程式への適用), 機論, 61-590, A(1995), 2303-2308.
- (2) 長島利夫, 奥田洋司, 矢川元基, エレメントフリーガラキン法に関する基礎的検討 (第2報, 二次元ポテンシャル問題への適用), 機論, 62-599, A(1996), 1746-1753.
- (3) Nyroles, B., Touzot, G. and Villon, P., Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, Comput. Mech., 10(1992), 307-318.
- (4) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., Element-Free Galerkin Method, Int. J. Num. Methods Eng., 37 (1994), 229-256.
- (5) 長島利夫, 奥田洋司, 矢川元基, 節点単位処理に基づくメッシュレス法の開発 (定式化および二次元弾性問題への適用) 機論, 62-603, A(1996), 2474-2480.
- (6) 宮村倫司, 野口裕久, 横堀一雄, 幾何学的非線形エレメントフリーガラキン法による膜構造の解析, 計算工学講演会論文集 2-2(1997), 387-390.
- (7) P. Krysl and T. Belytschko, Modeling of 3D propagating cracks by the element-free galerkin method, Advances in Computational Engineering Science, Eds. S.N. Atluri and G. Yagawa (1997), 128-133.
- (8) 野口裕久, 川島徹也, 付帯条件付最小自乗法に基づくグリッドレス法の構造解析への適用, 計算工学講演会論文集, 2-2(1997) 391-394.
- (9) 谷口健男, FEMのための要素自動分割-デローニー三角分割法の利用-(1992), 森北出版.
- (10) 日本機械学会編, 機械工学便覧A4編 (1987), 日本機械学会, pp. A4-95.