Transactions of JSCES, Paper No.19990028

エレメントフリーガラーキン法による 生成系安定き裂進展シミュレーション *

Element-free Galerkin analysis of stable crack growth based on experimental results

津乗充良[1]，萩原世也[2]，池田　徹[3]，木戸智洋[1]，宮崎則幸[3]

Mitsuyoshi TSUNORI, Seiya HAGIHARA, Toru IKEDA,
Tomohiro KIDO, and Noriyuki MIYAZAKI

[1] 九州大学大学院工学研究科物質プロセス工学専攻（〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1）
[2] 佐賀大学理工学部機械システム工学科（〒 840-8502 佐賀市本庄町 1 番地）
[3] 九州大学大学院工学研究科（〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1）

The element-free Galerkin method (EFGM) is one of the meshless method without node-element connectivity information. It is expected to reduce the work for creating the mesh. It has been tried to be applied to various problems. Another notable feature of the EFGM is that it has the continuity of the first derivative i.e. strain and stress for a structural analysis by selecting the weight function. Since the displacement, strain and stress can be obtained anywhere, it is more advantageous to calculate the fracture mechanics parameters for nonlinear fracture mechanics problems than the finite element method (FEM). We can set the arbitrary integral contour or the moving integral contour along the crack propagation when we calculate them.

In the present paper, the EFGM is applied to two-dimensional stable crack growth analysis which is required to estimate J-integral and T*-integral, and we confirm that the EFGM is effective for stable crack growth analysis.

Key Words : Computational Mechanics, Numerical Analysis, Element-Free Galerkin Method, Meshless Method, Finite Element Method, Fracture Mechanics, Crack Growth

1. 緒　言

CAE における解析ツールとして有限要素法は膨大なアプリケーションが用意され，そのプリ・ポスト処理に関するツールも多彩なものが開発され用意されている．しかし，メッシュ生成の作業は未だに煩雑さを伴い，手作業でアダプディブ的にメッシュを生成する際，あるいは解析の検証で複数のメッシュを生成する際にはかなりの作業時間を要する．

このようなメッシュ生成を避ける解析手法として，近年メッシュレス法が注目されている．メッシュレス法とは節点と要素のコネクティビティ情報を必要としない解析方法であるが，その解析方法は Belytschko ら(1)により提案されたエレメントフリーガラーキン法(EFGM)，Liu ら(2)の RKPM 法，また，有限要素法であるが，ユーザーにメッシュを意識させない方法としている矢川ら(3)のフリーメッシュ法などが挙げられる．

著者らはこれまでに EFGM の移動最小二乗法(MLSM)の節点検索に，CPU 時間を節約するために有向グラフ表記法を用いた節点検索法を提案した．また，同時に EFGM を非線形問題であるクリープ問題と弾塑性問題に適用し，有限要素法から得られた結果と比較し，有限要素法と同程度の精度の解が得られる事を示した(4)(5)．

メッシュレス法の中でも EFGM が有限要素法と異なるもう一つの特徴として，MLSM を用いるために一階微分量であるひずみや応力の連続性を MLSM の重み関数の選択によって確保することができることが挙げられる．

EFGM では変位，応力，ひずみ等の値を任意の点において求めることができる．非線形破壊力学問題における J 積分(6)は経路上で積分，T* 積分(7)はさらに領域積分をも行うために，EFGM 解析を行うと積分経路を任意にかつ容易に設定でき，さらにその特徴を生かすことができる．

有限要素法では，得られた応力，ひずみは積分点での値として得られるため，解析後処理として積分点上の値を補間するプログラムを作成し，経路積分あるいは領域積分における積分点上の値を求めなければならない．また，応力，ひずみが要素間で不連続であるために要素境界での取り扱いも問題となる．特に T* 積分においては，積分経路上とその内部において領域積分を行うために，有限要素法では解析後処理として多くの労力が要求される．

* 原稿受付 1999 年 10 月 14 日 , 改訂年月日 1999 年 12 月 13 日 , 発行年月日 1999 年 12 月 27 日 , ©1999 年 日本計算工学会.

Manuscript received, October 14, 1999; final revision, December 13, 1999; published, December 27, 1999. Copyright © 1999 by the Japan Society for Computational Engineering and Science.

さらに，き裂進展を伴う破壊解析において，EFGMは，容易に積分経路を移動できる利点がある．EFGMは，この移動していく積分経路を，節点やバックグラウンドセルと無関係に，き裂を取り囲む円形などの単純な形状に設定できる．このため，数値積分を行う際の手順も，非常に単純なものにできる．

これに対して，有限要素法のき裂進展解析では，要素を経路積分および領域積分の単位として利用するため，積分経路の移動が難しく，積分経路を進展前後のき裂先端全体を取り囲むように固定することが良く行われている．しかし，この方法では，き裂を最初に設定した積分経路を越えて進展させることができない．また，き裂の進展に伴って，積分経路とき裂先端の距離が変化するため，解析精度が低下するなどの欠点を持つ．これを防ぐために，積分経路をき裂の進展に伴って移動させることも行われているが，新たに要素を再分割する操作を行うことが必要となるため，プログラムのアルゴリズムが非常に複雑になり，要素の再分割に伴って誤差が堆積するなどの新たな問題も発生する．

本論文では，実験結果に基づく生成系の安定き裂成長解析を行い，経路積分を伴う破壊力学パラメータであるJ積分とT*積分を求める．これらにより，EFGMが容易に積分経路を設定することができ，経路積分を用いる破壊力学パラメータを求める有効な解析手法であることを示す．

2. 解析理論

2.1　**支配方程式**　本論文では解析手法としてEFGMを用いる．EFGMでは，有限要素法と同様な仮想仕事の原理を支配方程式としている．二次元微小変形弾塑性問題においては次式のように表される．

$$\int_V \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^T(\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma})dV - \int_V \delta\Delta\boldsymbol{u}^T(\bar{\boldsymbol{F}}+\Delta\bar{\boldsymbol{F}})dV - \int_S \delta\Delta\boldsymbol{u}^T(\bar{\boldsymbol{T}}+\Delta\bar{\boldsymbol{T}})dS = 0 \quad (1)$$

ここで,$\boldsymbol{\sigma}$,$\boldsymbol{\varepsilon}$は応力テンソル成分，ひずみテンソル成分をそれぞれ縦に並べたベクトルを表し,$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル,$\bar{\boldsymbol{F}}$ は体積力ベクトル,$\bar{\boldsymbol{T}}$ は表面力ベクトルを表している.$\Delta\boldsymbol{\sigma}$,$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$,$\Delta\boldsymbol{u}$,$\Delta\bar{\boldsymbol{F}}$,$\Delta\bar{\boldsymbol{T}}$ は，それぞれその増分を表し，δは変分を表している．

2.2　**内挿関数の作成**　EFGMでは，積分領域内の評価点における形状関数（近似関数）を，評価点から定めた影響半径の領域内に分布する近傍の節点値から，MLSM[1]を用いて局所的に作成する．本論文では次式に示す線形基底$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$を用いて領域内の任意の評価点$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ での関数$u^h(\boldsymbol{x})$ を近似的に表す．

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})^T = [1, x, y] \quad (2)$$

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_j^m p_j(\boldsymbol{x})a_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \quad (3)$$

ただしm は基底の項数であり，ここでは$m=3$ である．未定係数$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$は，次式で定義される評価関数$R$を最小化させるように決定する．

$$R = \sum_I^n w_I(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - u_I\right]^2 \quad (4)$$

ここで,nは評価点$\boldsymbol{x}$ の近傍に位置する節点数であり,wは重み関数である．本論文では重み関数には次式の指数型の関数を用いた[1]．

$$w_I(d_I) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(d_I/C)^{2k}} - e^{-(d_{mI}/C)^{2k}}}{1 - e^{-(d_{mI}/C)^{2k}}}, & if\ d_I \le d_{mI} \\ 0, & if\ d_I > d_{mI} \end{cases} \quad (5)$$

ここで,$d_I = \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I\|$,$C = l \cdot d_{mI}$ である．ただし,d_{mI} は影響半径であり，積分点を含む三角形を構成する節点同志の最も距離が長い節点間の距離にある係数をかけた値とした．また,C は重み関数を制御する変数である．本論文では$k=1$ とし,l には任意の値を用いた．この値には0.25程度が良く用いられる[8]．

MLSMにより得られた内挿関数を用いて式(1)の離散化を行い,J_2ひずみ増分理論に基づく応力－ひずみ関係式を用いると，以下のEFGMの増分形の弾塑性剛性方程式が得られる[5]．

$$(\boldsymbol{k}^e + \boldsymbol{k}^p)\Delta\boldsymbol{q} = \Delta\boldsymbol{f}_S + \Delta\boldsymbol{f}_V + \boldsymbol{r} \quad (6)$$

ここで$\boldsymbol{k}^e$は弾性剛性マトリックス,$\boldsymbol{k}^p$は塑性剛性マトリックス,$\Delta\boldsymbol{f}_S$は表面力ベクトルによる節点荷重増分ベクトル,$\Delta\boldsymbol{f}_V$は体積力による節点荷重増分ベクトル,$\boldsymbol{r}$は残差荷重ベクトルである．

節点変位増分は式(6)を各増分ステップで解くことにより求めることができる．逐次線形化に伴う残差不平衡力はNewton-Raphson法による繰り返しにより収束させる．

2.3　**破壊力学パラメータ**　本研究で用いる破壊力学パラメータは，J積分，T*積分である．以下にこれらのモードIに対する定義を与える．

J積分はRice[6]により提案された非線形弾性体に対する経路積分であり，図1に示す積分経路Γに対して次のように与えられている．

$$J = \oint_\Gamma \left[W n_1 - t_i u_{i,1}\right] d\Gamma \quad (7)$$

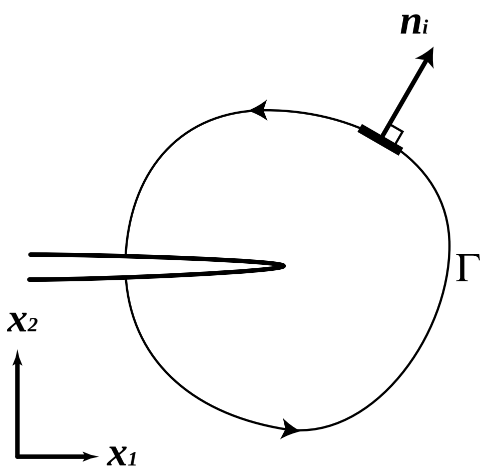

Fig. 1 Contour path for evaluation of J integral.

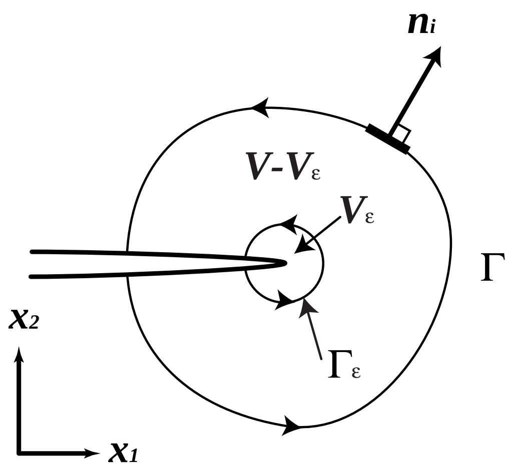

Fig. 2 Contour path for evaluation of T* integral.

ここでW はひずみエネルギ密度，n_i はΓ上に立てた外向き単位法線ベクトルのx_i 成分，$t_i\left(=\sigma_{ij}n_j\right)$ は表面力，σ_{ij} は応力，u_i は変位を表す．$u_{i,1}=\partial u_i/\partial x_1$ である．

T* 積分は Atluri ら[7]により提案された経路独立積分であり，任意の構成則，負荷・除荷過程，弾塑性き裂進展問題に対しても経路独立性が成り立つ．T* 積分は，図 2 に示す積分経路に対して，準静的問題の場合，次式で与えられている．

$$
\begin{aligned}
T^* &= \oint_{\Gamma_\varepsilon}\left[W n_1 - t_i u_{i,1}\right]d\Gamma \\
&= \oint_{\Gamma}\left[W n_1 - t_i u_{i,1}\right]d\Gamma \\
&\quad + \oint_{V-V_\varepsilon}\left[W_{,1} - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij,1}\right]dV
\end{aligned} \tag{8}
$$

ここで，Γ_ε はプロセスゾーンを内部に含むき裂先端に充分近い経路とする．また，一般にひずみ履歴に依存するひずみエネルギ密度W は次式で定義される．

$$
W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \tag{9}
$$

T* 積分の物理的な解釈は，き裂先端経路へのエネルギ流入率として定義されている．

3. 計算アルゴリズム

解析の流れ図を図 3 に示す．本論文ではいわゆる生成系のき裂進展弾塑性解析を行うため増分型の EFGM 解析を行う．また，逐次線形化に伴う残差不平衡力は Newton-Raphson 法による繰り返し計算によって収束させる．また，破壊力学パラメータの計算も増分型のひずみエネルギ密度を用いることにより各増分ステップで計算することにする．

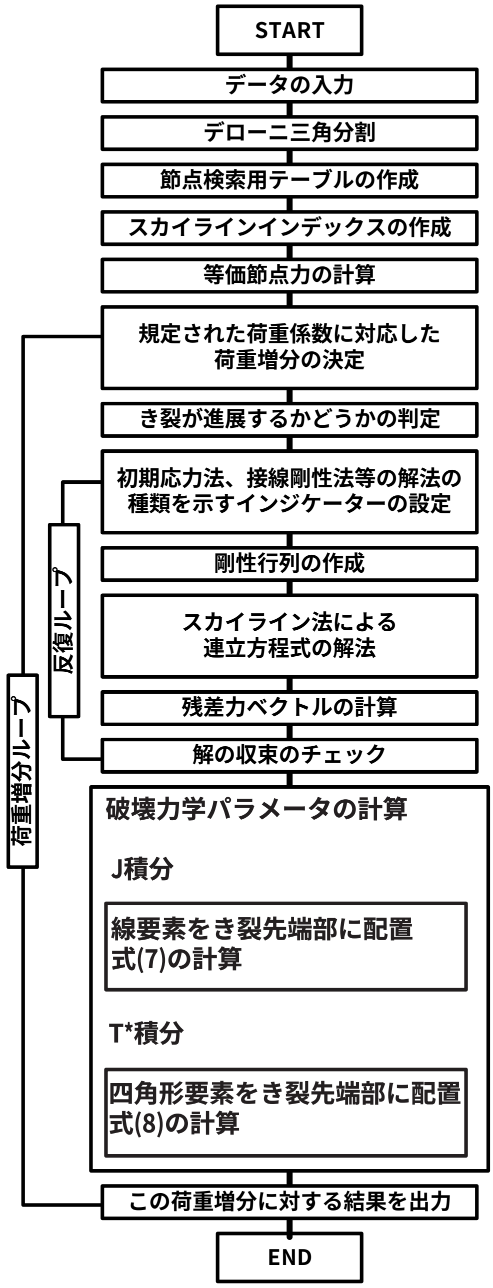

Fig. 3 Flow chart of analysis using a stably growing crack with elastio-plastic plobelm.

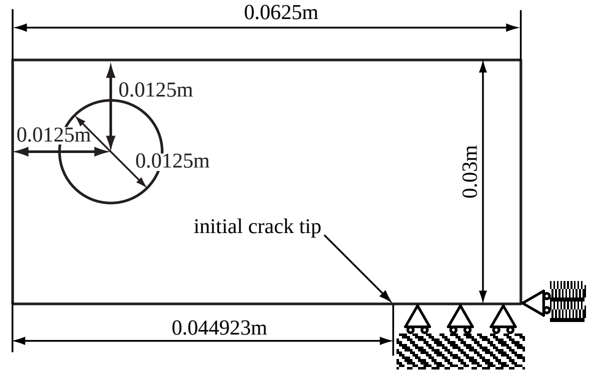

Fig. 4 Dimensions and boundary conditions of the analyzed CT specimen (half model).

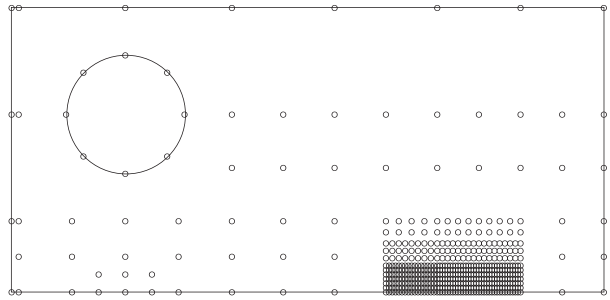

Fig. 5 Node allocation of CT specimen (half model).

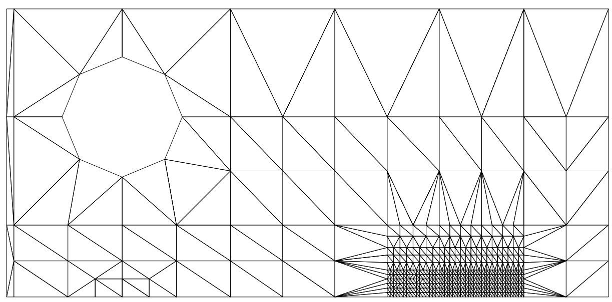

Fig. 6 Background cells of CT specimen (half model).

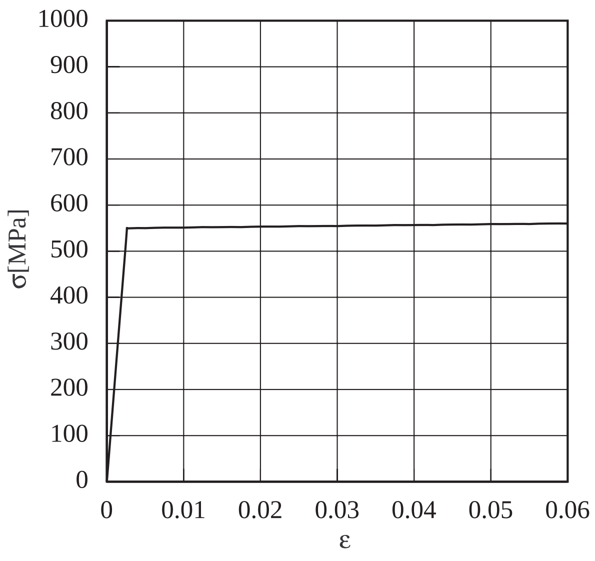

Fig. 7 Stress - strain relation used in the present analysis.

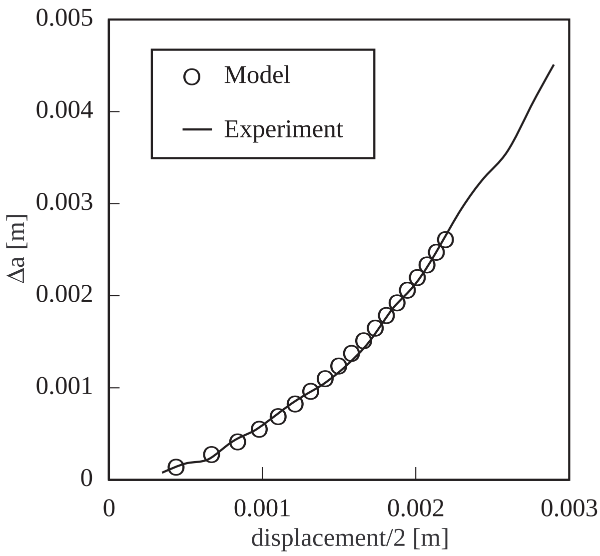

Fig. 8 Relationship between half of displacement at the load point and crack growth obtained by experiment.

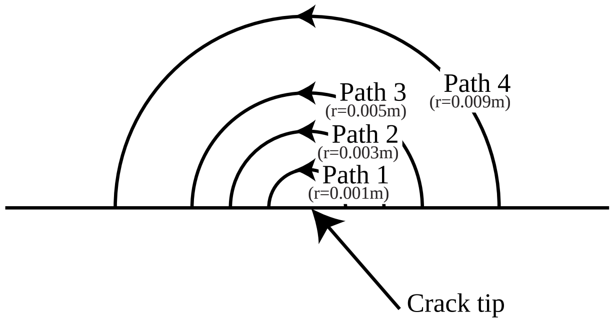

Fig. 9 Conour paths for J-integral.

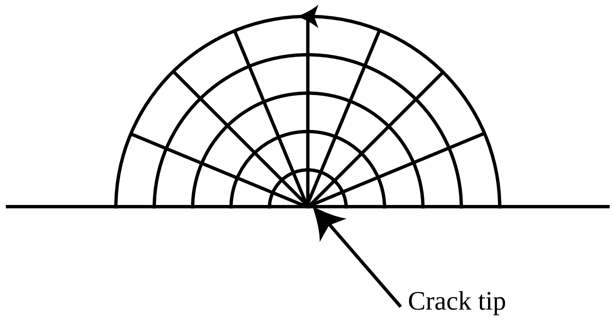

Fig. 10 Contour path and mesh for domain integral used for T*-integral.

4. 数値計算例

上記の計算アルゴリズムに基づき開発した EFGM による生成系のき裂進展弾塑性解析プログラムを用いて図 4 に示す CT 試験片の解析を行った．本解析では，図 5 に示すような 514 節点の節点配置を用いた．EFGM では，領域積分を行うことが必要であり，矩形の積分領域のみで積分を行う方法などがあるが，境界処理の簡便さ等から，ここではプログラムには節点の自動生成機能とデ

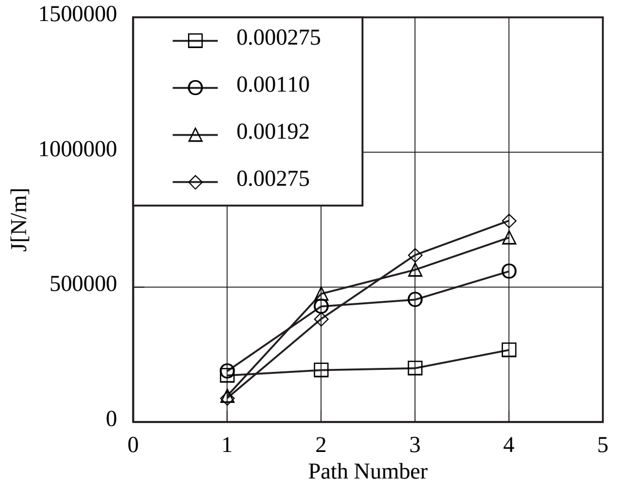

Fig. 11 Path dependence of J-integral
for stable crack growth.

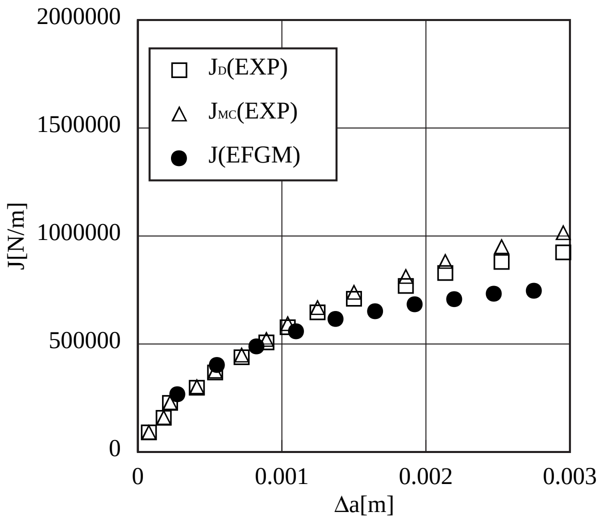

Fig. 12 Relationship between J-integral
and crack propagation.

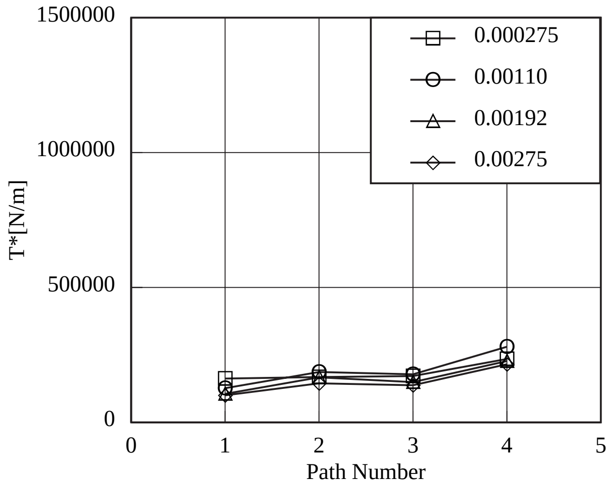

Fig. 13 Path independence of T*-integral
for stable crack growth.

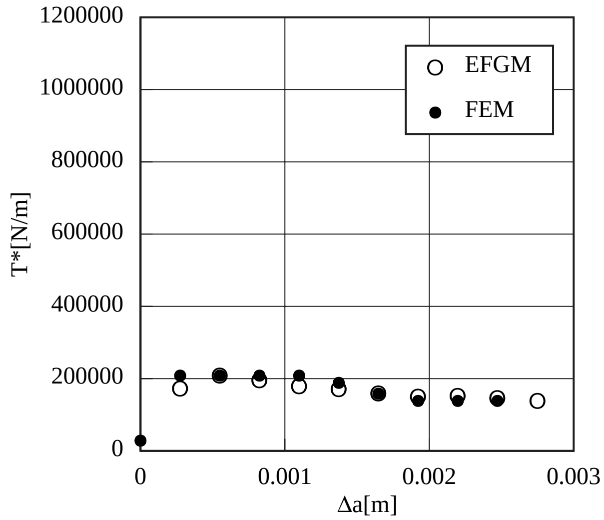

Fig. 14 Relationship between T*-integral
and crack propagation.

ローニ三角分割[9]による積分領域の自動生成機能を組み込み，三角形の積分領域を用いる．得られた積分領域分割図を図 6 に示す．また，MLSM の積分点近傍の節点検索に有向グラフによる節点検索機能[4]を用いるようになっている．

解析に用いた材料は A533B 鋼であり，材料定数は下記の通りである[10]．

$E = 206GPa$, $\nu = 0.3$, $\sigma_Y = 550MPa$, $H = 180MPa$

ただし, E はヤング率, ν はポアッソン比, σ_Y は降伏応力, H はひずみ硬化率であり，図 7 に示すような降伏点以降の傾きを直線近似し，2 直線とした応力－ひずみ関係を用いた．

本解析では，生成系のき裂進展シミュレーションを行うために図 8 に示す CT 試験片による実験から得られた 2 分の 1 荷重線変位－き裂進展量の関係[10]を忠実に満たすように変位制御法と境界を解放することによりき裂進展のシミュレーションを行い，き裂進展に伴う破壊力学パラメータの変化を求めた．

4.1 **積分経路と積分領域**　J 積分については，積分経路は図 9 に示すものを用いた．また，T* 積分については経路内の領域積分が必要なため，図 10 に示す積分経路の内部を分割して積分を行った．領域積分は，それぞれその内部に初期節点配置とは無関係に図 10 のように分割を行い，正規座標に変換して積分を行った．EFGM の積分経路は完全な円弧状の任意の積分経路を容易に取ることができ，有限要素法の積分経路のようにメッシュに依存した複雑な経路を選択する必要がないのが特徴である[11]．特に T* 積分は経路内部の領域積分が必要なため，要素分割に依存しない積分経路と積分方法を採用できることは特にき裂進展問題に関して利点が大きい．ここでは各経路でそれぞれ線要素を初期節点配置とは無関係に作成し，Path1（r=0.001m），Path2（r=0.003m），Path3（r=0.005m），Path4（r=0.009m）の 4 通りで解析を行う．ただし，この積分経路はき裂進展とともに移動し，常にき裂先端を中心とする円弧状となるようになっている．

4.2 **J 積分**　まず，き裂が進展した場合の J 積分値の経路依存性を図 11 に示す．J 積分の値は，き裂進展後には経路独立性が崩れ，き裂先端部における力学的特性を表す破壊力学パラメータとはなり得ない．このように，

厳密な意味からはＪ積分をき裂進展後の挙動を表すための破壊力学パラメータとして用いることはできないという有限要素法と同様の結果が移動型積分経路を用いたEFGM 解析でも示されている．

また，図 12 にＪ積分のき裂進展量による変化であるJ-R カーブ（き裂進展抵抗曲線）を示す．簡易評価式としては，J_D ，J_{MC} の２通りを用いた．$J_{D(EXP)}$ ，$J_{MC(EXP)}$ と記されているのは，Ernst[12] ら，Merkle とCorten[13]により提案されている式で，文献(10)に記載されている実験結果より求めた荷重ー荷重線変位関係を用いて計算した値であり，EFGM のＪ積分はき裂先端より十分離れた経路である Path4 の値である．EFGM から得られたＪ積分は，他の二つのＪ積分値より若干低い傾向が見られるが，ほぼ近い値が得られている．また図 12 には示していないが，文献(10)において有限要素法から得られた遠方経路のＪ積分は，ここに示した$J_{D(EXP)}$ ，$J_{MC(EXP)}$ に近い値となっており，これにより EFGM から得られたＪ積分値が有限要素法から得られた結果とも近いことが言える．したがって，EFGM が移動型積分経路による弾塑性き裂進展解析によりき裂進展抵抗を有限要素法と同等に求めることができることを示している．

4.3　**T* 積分**　　4.2 節と同様にき裂進展量をいくつか変えた時の T* 積分値の経路独立性を図 13 に示す．図 11 と比較すると，もっとも外側の経路において T* 積分は内側の経路よりも若干の差があるものの T* 積分はＪ積分より経路独立性を示しており，EFGM 解析においてもその特性が現れている．ただし，この時に用いた積分経路はＪ積分と同様の積分経路を採用した．

また，図 14 に Path3 における T* 積分のき裂進展量による変化（T* 抵抗曲線）を示す．この図には文献(10)で解析が行われた有限要素法による T* の解析結果もあわせてプロットしている．文献(10)の有限要素解析では積分経路がき裂の進展に関係なく固定されている．図 12 と比べて T* 抵抗曲線はき裂の進展と共に増加しておらず，ほぼ一定に近い値を取っており，安定的なき裂進展状態をよく現している．また，有限要素法から得られた T* 積分の値とほぼ一致しており，EFGM による安定き裂進展解析によるき裂先端の進展に伴う除荷を伴う解析の妥当性と移動型の積分経路とその領域積分の値の妥当性を示している．

5. 結　言

本論文では，エレメントフリーガラーキン法を弾塑性生成系き裂進展解析に適用した．これにより，エレメントフリーガラーキン法の利点である変位，応力，ひずみ等の値を任意の点において求められることを利用して破壊力学パラメータを簡便に求めることを試みた．

これにより，EFGM の積分経路は任意の積分経路を容易に取ることができ，有限要素法の積分経路のようにメッシュに依存した複雑な経路を選択する必要がなく，同程度の解析を行えることを示した．

また，き裂進展を伴う破壊解析において移動型の積分経路を採用できるなどの利点も大きい．移動型の積分経路において T* 積分が経路独立になることも確認でき，EFGM が弾塑性解析でのき裂先端での除荷過程を正しく評価できていることを確認できた．

参考文献

(1) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L. , Element-free Galerkin method, Int. J. Num.Methods Eng., 37 (1994), 229-256.

(2) Liu, W. K., Jun, S., Li, S., Adee, J. and Belytschko, T., Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics, Int. J. Numer. Methods Eng. , 38(1995), 1655-1679.

(3) Yagawa, G. and Yamada T., Free Mesh Method: A New Meshless Finite Element Method, Comput. Mech., 18 (1996) , pp.383-386.

(4) 萩原世也，津乗充良， 池田徹，柴田朝史，宮崎則幸，中垣通彦，エレメントフリーガラーキン法の有向グラフによる節点検索法と非線形クリープ問題への適用， 日本機械学会論文集， 64-624， A(1998)， 2073-2079.

(5) 萩原世也，津乗充良， 池田徹，宮崎則幸，エレメントフリーガラーキン法の二次元弾塑性問題への適用， 計算工学講演会論文集， 4-2(1999) 61-64.

(6) Rice, J. R.， A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks , J. Appl. Mech. , 35 (1968), 379-386.

(7) Atluri, S.N., Nishioka, T. and Nakagaki, M., Engineering Fracture Mechanics, Incremental Path-Independent Integrals in Inelastic and Dynamic Fracture Mechanics, Eng. Frac. Mech., 20- 2, (1984), 209-244.

(8) Lu, Y. Y., Belytschko,T. and Gu,L., A new inplementation of element-free Galerkin method, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. , 113 (1994), 397-414.

(9) 谷口健男，FEMのための要素自動分割－デローニー三角分割法の利用－(1992)， 森北出版.

(10) 宮崎則幸，中垣通彦， 境俊也，越智健一，宗像健，非均質材中を安定的に進展するき裂の二次元有限要素解析， 日本機械学会論文集， 61-582， A(1995)， 289-296.

(11) たとえば，Brust, F. W., Nakagaki, M. and Springfield, S., Integral Parameters for Thermal Fracture, Eng. Frac. Mech., 33- 4, (1989), 561-579.など.

(12) Ernst, H. A., Estimation on J-integral and tearing modulus from a single specimen test record, ASTM STP 743,(1981), 476.

(13) Merkle, J.G.and Corten, H.T, A J Integral Analysis for the Compact Specimen, Considering Axial Force as Well as Bending Effects, Trans. ASME, J. Press. Vessel Tech., 96-4, (1974), 286-292.