

エレメントフリーガラキン法の弾塑性問題への適用*

Application of element-free Galerkin method to elastic-plastic problems

津乗充良¹, 萩原世也², 池田 徹³, 木戸智洋¹, 宮崎則幸³

Mitsuyoshi TSUNORI, Seiya HAGIHARA, Toru IKEDA,
Tomohiro KIDO, and Noriyuki MIYAZAKI

¹九州大学大学院工学研究科物質プロセス工学専攻 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

²佐賀大学理工学部機械システム工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄町 1 番地)

³九州大学大学院工学研究科 (〒812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1)

The element-free Galerkin method (EFGM), which is one of the meshless method, has been tried to be applied to the stress concentration, crack and shells problems. Using the moving least square approximation (MLSM) as the interpolation function is a special feature for the EFGM. Another feature for the EFGM is that the EFGM has the continuity of the first derivative i.e. strain and stress for a structural analysis by selecting the weight function. Then we can obtain displacement, strain and stress anywhere. Calculating the fracture mechanics parameter, we can calculate more accurate fracture mechanics parameter for nonlinear fracture mechanics problems. Therefore, the EFGM is a promising method for treating problems such as crack growth because it can easily obtain the variations of the fracture mechanics parameters. The EFGM has not been applied to nonlinear problems such as elastic-plastic problems. If the EFGM will be able to applied to the nonlinear problems, it will be useful as a numerical method for solid mechanics.

In the present paper, the EFGM is applied to elastic-plastic problems and to estimating J-integral. The results obtained from the EFGM agree well with those of the finite element method, and the EFGM is successfully applied to the elastic-plastic fracture mechanics problem.

Key Words : Computational Mechanics, Numerical Analysis, Element-Free Galerkin Method, Meshless Method, Finite Element Method, Structural Analysis, Fracture Mechanics, Elastic-Plastic Problem

1. 緒言

Belytschko ら⁽¹⁾により提案されたエレメントフリーガラキン法(EFGM)は, CAE システムの解析ツールとして注目されているメッシュレス法の中でも有力な方法として応力集中, き裂, 殻, 板など多くの問題に対する適用を試みた研究が行われている⁽²⁾⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾. EFGM は移動最小二乗法(MLSM)を用いるため, 有限要素法と比較して計算時間がかかるなどの点も見られるが, CAE における一連の作業の流れの中で, 解析に関わる要素分割や再要素分割における作業時間を大幅に減少させることができるとして注目されている. また, EFGM の改良を試みた研究も行われている⁽⁶⁾⁽⁷⁾⁽⁸⁾.

著者らは EFGM の MLSM の節点検索に, CPU 時間を節約するために有向グラフ表記法を用いた節点検索法を提案した. また, EFGM を非線形問題であるクリープ問

題に適用して, 有限要素法から得られた結果と比較し, 有限要素法と同程度の精度の解が得られる事を示した⁽⁹⁾.

EFGM は一階微分量であるひずみや応力の連続性を MLSM の重み関数の選択によって確保することができる. これに対し有限要素法では, ひずみ, 応力は要素間で不連続となる.

EFGM は MLSM により解析領域上の任意の点においてひずみ, 応力を求めることができる. したがって, 経路積分を用いる非線形破壊力学パラメータを求める際には, 有限要素法の解析の場合に必要なであったデータスムージングなどの手法を取り入れることなく求めることができる. また, 積分経路の決定を容易にすることができる.

き裂が進展して行くような移動境界問題に対して, リメッシングを必要としない EFGM は適していると考えられる. さらに, き裂進展を伴う破壊力学問題における破壊力学パラメータを求める手法としても適している. このような EFGM を破壊力学問題に適用する際に不可欠なのは, 材料非線形問題における適用性の検証である.

メッシュレス法を弾塑性問題に適用した例は, Jun⁽¹⁰⁾らが RKPM 法を用いてせん断帯出現の問題に対しての適用を行っており, EFGM については H. Askes⁽¹¹⁾らが弾

* 原稿受付 1999 年 10 月 14 日, 改訂年月日 2000 年 1 月 17 日, 発行年月日 2000 年 2 月 24 日, ©1999 年 日本計算工学会.

Manuscript received, October 14, 1999; final revision, January 17, 2000; published, February 24, 2000. Copyright © 1999 by the Japan Society for Computational Engineering and Science.

塑性問題への適用を行い、EFGM のロッキング性についての検討を行っている。しかし、弾塑性問題において EFGM の特徴を生かした破壊力学パラメータの計算方法、精度等の具体的な検討例はこれまでない。

したがって、本論文では、EFGM を弾塑性問題に適用するために増分型の EFGM の定式化を行う。また、き裂の問題を解析し、EFGM と MLSM の特徴を生かし、経路積分を伴う破壊力学パラメータの一つである J 積分を求め、有限要素法から得られた結果と比較検討を行い、これらにより、EFGM が弾塑性問題と破壊力学問題にも有効に適用できることを示す。

2. 解析方法

2.1 弾塑性問題における増分型エレメントフリーガラキン法の定式化 弾塑性問題やクリープ問題など材料非線形性を伴う解析では増分法による解析を行うのが一般的である。この方法では、荷重や変位を分割して負荷することにより、各計算ステップでの支配方程式あるいは関係式を線形化して解き、その解を加算して非線形挙動を求める。ただし、ここでは幾何学的非線形問題は取り扱わないことにする。このため、仮想仕事の原理、ひずみ - 変位関係式、応力 - ひずみ関係式を増分型で表したものが必要となる。

弾性ひずみ ε^e と塑性ひずみ ε^p は互いに分離可能であると仮定し、全ひずみが弾性ひずみ ε^e と塑性ひずみ ε^p の和として以下の式で表されるとする。

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1)$$

その増分量は以下の式で表される。

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p \quad (2)$$

ただし、 ε , ε^e , ε^p , $\Delta \varepsilon$, $\Delta \varepsilon^e$, $\Delta \varepsilon^p$ はそれぞれテンソル成分を縦に並べたベクトルである。

EFGM における増分型の仮想仕事の原理は以下のよう
に導かれる。

$$\int_V \delta \Delta \varepsilon^T (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) dV - \int_V \delta \Delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{F}} + \Delta \bar{\mathbf{F}}) dV - \int_S \delta \Delta \mathbf{u}^T (\bar{\mathbf{T}} + \Delta \bar{\mathbf{T}}) dS = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル成分を縦に並べたベクトルを表し、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 $\bar{\mathbf{F}}$ は体積力ベクトル、 $\bar{\mathbf{T}}$ は表面力ベクトルを表している。 $\Delta \boldsymbol{\sigma}$, $\Delta \mathbf{u}$, $\Delta \bar{\mathbf{F}}$, $\Delta \bar{\mathbf{T}}$ は、それぞれその増分を表している。

EFGM では、積分領域内の評価点における形状関数（近似関数）を、評価点から定めた影響半径の領域内に分布する近傍の節点値から、MLSM⁽³⁾を用いて局所的に作成する。本論文では次式に示す線形基底 $p(x)$ を用いて領域内の任意の評価点 (x, y) での関数 $u^h(x)$ を近似的に表す。

$$p(x)^T = [1, x, y] \quad (4)$$

$$u^h(x) = \sum_j^n p_j(x) a_j(x) = p(x)^T a(x) \quad (5)$$

ただし m は基底の項数であり、ここでは $m=3$ である。未定係数 $a(x)$ は、次式で定義される評価関数 J を最小化させるように決定する。

$$J = \sum_I^n w_I(x - x_I) \left[p(x_I)^T a(x) - u_I \right]^2 \quad (6)$$

ここで p は評価点 x の近傍に位置する節点数であり、 w は重み関数である。本論文では重み関数には次式の指数型の関数を用いた⁽¹⁾。

$$w_I(d_I) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_I/C)^{2k}} - e^{-(d_{ml}/C)^{2k}}}{1 - e^{-(d_{ml}/C)^{2k}}}, & \text{if } d_I \leq d_{ml} \\ 0, & \text{if } d_I > d_{ml} \end{cases} \quad (7)$$

ここで $d_I = \|x - x_I\|$, $C = l \cdot d_{ml}$ であり、 x_I は節点座標値である。ただし d_{ml} は影響半径であり、図 1 に示すように評価点が存在するバックグラウンドセル三角形の頂点と評価点との距離の最も長い距離にある係数をかけた値とした。また、 C は重み関数を制御する変数である。本論文では $k=1$ とし l には 0.25 程度が良く用いられており⁽¹²⁾、本論文でも 0.25 を用いた。

形状関数 N は節点座標値 x_I から得られる $\phi_I(x)$ より次式のように定められる。

$$N = \begin{bmatrix} \phi_1(x) & 0 & \cdots & \phi_n(x) & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & \cdots & 0 & \phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (8)$$

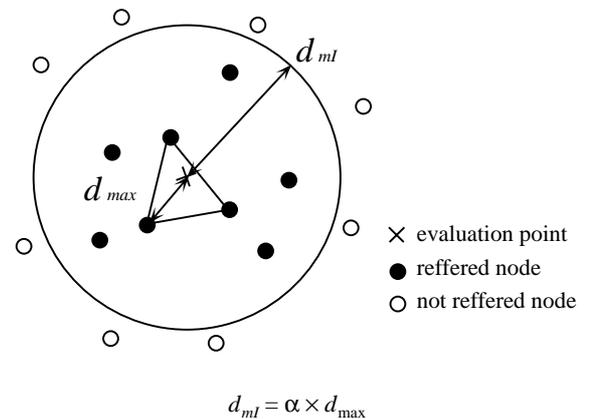


Fig. 1 Definition of radius of influence region.

ここで $\phi_i(x)$ は次式から得られる .

$$\phi_i(x) = \sum_j^m p_j(x) \left(A^{-1}(x) L(x) \right)_{ji} \quad (9)$$

$A(x)$ $L(x)$ については以下の式より求める .

$$A(x) = \sum_j^m w_j(x) p(x_j) p(x_j)^T \quad (10)$$

$$w_j(x) = w_j(x - x_j) \quad (11)$$

$$L(x) = \left[w_1(x)p(x_1), w_2(x)p(x_2), \dots, w_n(x)p(x_n) \right] \quad (12)$$

形状関数を用いて、ひずみ - 節点変位マトリックス B は以下の式で表すことができる .

$$B = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \dots & \phi_{n,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & \dots & 0 & \phi_{n,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \dots & \phi_{n,y} & \phi_{n,x} \end{bmatrix} \quad (13)$$

以上の式を用いて有限要素法と同様な定式化⁽¹³⁾により Δq を節点変位増分ベクトルとして整理することにより、以下の増分型の弾塑性問題に関する EFGM の剛性方程式が得られる .

$$(k^e + k^p) \Delta q = \Delta f_s + \Delta f_v + r \quad (14)$$

ここで k^e は弾性剛性マトリックス k^p は塑性剛性マトリックス Δf_s は表面力ベクトルによる節点荷重増分ベクトル Δf_v は体積力による節点荷重増分ベクトル r は残差荷重ベクトルであり、これらは、それぞれ以下のように書ける .

$$k^e = \int_V B^T D^e B dV \quad (15)$$

$$k^p = \int_V B^T D^p B dV \quad (16)$$

$$\Delta f_s = \int_S N^T \Delta \bar{T} dS \quad (17)$$

$$\Delta f_v = \int_S N^T \Delta \bar{F} dS \quad (18)$$

$$r = \int_S N^T \bar{T} dS + \int_S N^T \bar{F} dS - \int_V B^T \sigma dV \quad (19)$$

ただし D^e は、弾性応力 - ひずみマトリックスであり、 D^p は J_2 ひずみ増分理論より求められた塑性応力 - ひずみマトリックスである .

式(14)をそれぞれ定めた積分領域内で積分を行い、全領域について加算し、式(4)-式(14)の関係式を用いて各増分ステップで解くことにより節点変位増分を求めることができ、これらを加算していくことにより節点変位を

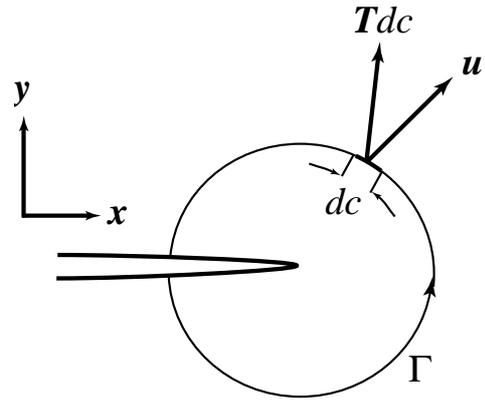


Fig. 2 Contour for evaluation of J-integral.

求めることができる . ただし J_2 ひずみ増分理論における応力履歴の評価はバックグラウンドセルの各積分点に保存して行っている . また、逐次線形化に伴う残差不平衡力は Newton-Raphson 法による繰り返しにより収束させる .

領域積分については、Belytschko ら⁽¹⁾が用いた矩形形状のバックグラウンドセルとは異なり、初期状態において配置した節点からデローニー三角分割⁽¹⁴⁾を用いて作成された三角形を用いて行った .

基本境界条件については、ペナルティ法を用いて処理を行っており⁽⁹⁾⁽¹³⁾、本論文では境界上に線要素を作成しガウス積分を行った .

2.2 エレメントフリー Galerkin 法を用いた J 積分の計算 EFGM では、内挿近似法に MLSM を用いるため任意の点において変位、およびその微分量である、ひずみ、応力も有限要素法よりも簡便に求めることができる . よって、き裂近傍の閉境界に沿って以下の式を用いて積分を行い J 積分の値を求めた⁽¹⁵⁾ .

$$J = \oint_{\Gamma} \left[W dy - T \cdot \frac{du}{dx} dc \right] \quad (20)$$

ここで W はひずみエネルギー密度 T は x に沿って右の部分が左の部分に及ぼす法線応力のベクトル μ は x 上の点の変位ベクトルを表す dc は積分経路上の微小な区間である .

このとき、J 積分の計算において必要となる経路上での応力値は積分点での応力値から MLSM を使うことにより求めることができる .

3 . 結果と考察

3.1 一様引張りを受ける円孔板の弾塑性解析例 まず、図3に示す円孔板に 100MPa の y 方向一定一様な引張り荷重を負荷した場合について解析を行った . ここで、材料定数には以下の値を用いた .

$$E = 206GPa, \nu = 0.3, \sigma_y = 190MPa, H = 220MPa$$

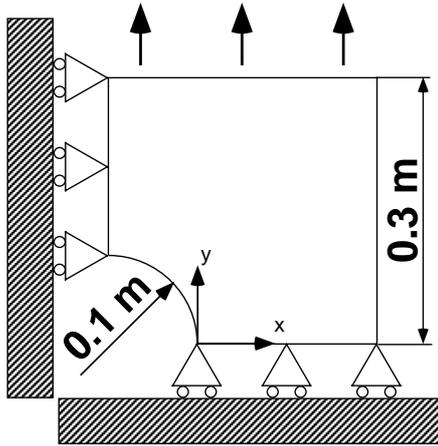


Fig. 3 Analyzed model for plate with a center hole.

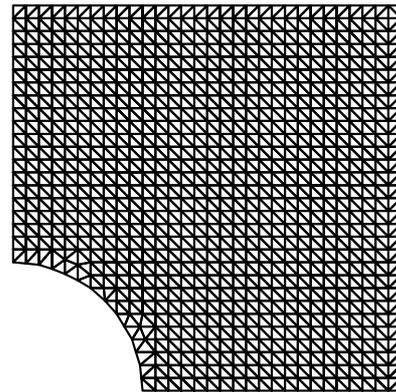


Fig. 5 Background cells for EFGM.

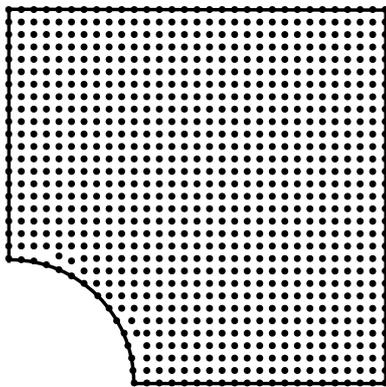


Fig. 4 Node allocation for EFGM.

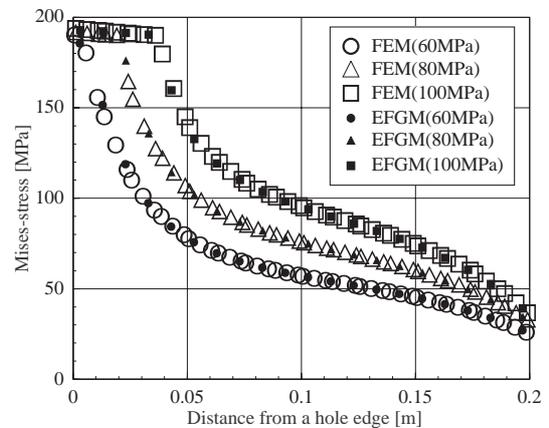


Fig. 6 Equivalent stress distribution at middle section of center holed plate.

ただし E はヤング率 ν はポアソン比 σ_y は降伏応力 H はひずみ硬化率である．比較的均等な節点配置による 878 節点の節点配置と積分領域分割を図 4 と図 5 にそれぞれ示す．図 6 には 878 節点数での円孔板中央断面付近の相当応力の分布を示す．この図において横軸は円孔端からの距離であり，縦軸は相当応力である．また比較のため，522 要素，1663 節点の 8 節点アイソパラメトリック要素によりほぼ均等なメッシュを作成し，有限要素法の解析を行った．そこから得られた相当応力の分布も同時に示している．数値積分は EFGM の場合，それぞれの三角形領域に対し 1 点積分で解析を行った．ただし，有限要素法の解は $y = 0$ の境界上の要素における積分点で $y = 0.00141 \text{ m}$ 程度の座標での値であり，EFGM の場合は $y = 0$ の境界上のバックグラウンドセルの積分点での値で $y = 0.00333 \text{ m}$ の座標での値である．同一の点での値では無いが，円孔板の大きさに対して 1-2% であり，ほぼ同一 y 座標での値として比較できる．

円孔端近傍では，応力集中が起こるため材料が降伏して塑性域に入る．図 6 において EFGM での解析結果は，円孔端近傍における相当応力が降伏応力付近でとどまっており，その状況をよく表している．また，EFGM は有限要素法と比較して少ない総自由度数であるにもかかわらず

精度の良い解が得られていることがわかる．
 3.2 弾性解析での J 積分の計算例 まず図 7 に示すような中央にき裂を有する平板に y 方向一定様な引張り荷重を負荷した場合について解析を行い，弾性問題における J 積分の値を求めた．651 節点による節点配置と積分領域分割を図 8 にそれぞれ示す．このときの材料定数には以下の値を用いた．

$$E = 206 \text{ GPa}, \nu = 0.3$$

また，この時の積分経路を図 9 に示す．今回の解析ではこの積分経路を 20 線要素に分割しそれぞれにおいてガウス積分を用いて積分を行った．この図中で経路は円弧状に取り，各経路間を均等な間隔で Path1 ($r = 0.01 \text{ m}$) から Path6 ($r = 0.06 \text{ m}$) までを設定した．また，精度の検証のために 176 節点と 4941 節点の 2 通りの解析をあわせて行った．ただし，これらの節点配置は 651 節点と同様に様な節点配置とした．これら 3 通りの節点配置から求められる J 積分値を参照解によって無次元化した値を図 10 に示す．ただし，参照解はハンドブック⁽¹⁶⁾に記載されている式より求められる応力拡大係数値から求めたものである．

J 積分の値は，積分経路に依存しない経路独立性を

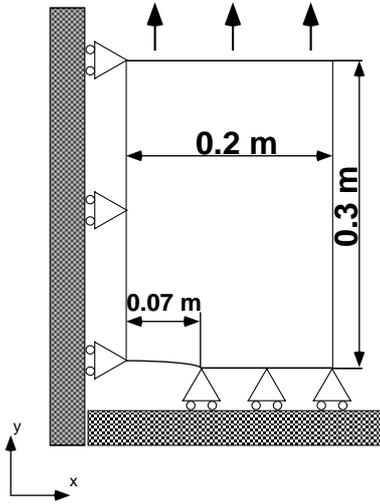


Fig. 7 Analyzed model for plate with a center crack.

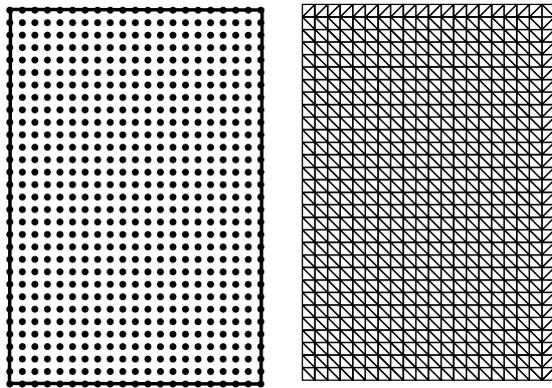


Fig. 8 Node allocation and background cells for EFGM(651 nodes).

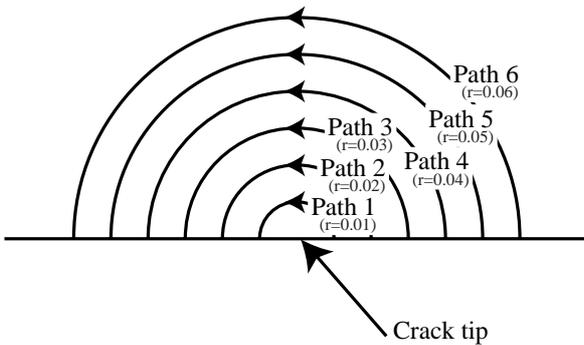


Fig. 9 Integral paths for J-integral.

持っている．本解析における EFGM での解は，き裂先端付近の経路をとった場合にばらつきがみられるものの，この経路独立性をよく表している．また，参照解と比較しても節点数が増えると J 積分値のばらつきも減っており良好な結果であると言える．

3.3 弾塑性解析での J 積分の計算例 3.2 節 Path3 の積分経路を用いて 3.2 節で行った解析モデルで弾塑性問題における J 積分の値を求めた．ただし，材料定数には 3.1 節と同様の値を用いた．その時の J 積分値を図 11 に示す．図 11 は，EFGM と有限要素解との比較を各応力レベルについて示したものであり，横軸には負荷した応

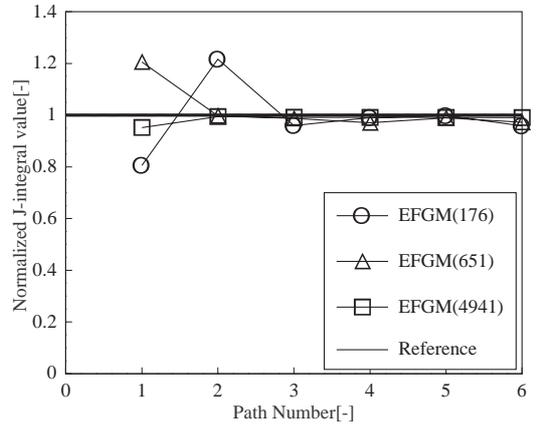


Fig. 10 Normalized J-integral value obtained in each path.

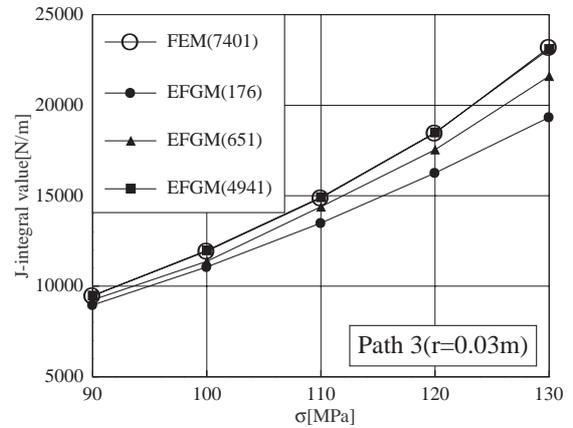


Fig. 11 J-integral value obtained in each stress level.

Table 1 Relative error of J-integrals from EFGM compared with J-integral from fine FEM.

σ (MPa)	(Unit %)				
	90	100	110	120	130
EFGM(176)	5.4	7.4	9.3	11.9	16.6
EFGM(651)	2.4	4.7	3.3	5.0	6.8
EFGM(4941)	0.032	0.30	0.22	0.15	0.40

力を示し，縦軸には J 積分値を示してある．ただし，EFGM での値は，3.2 節と同様の 3 パターンの節点配置であり，有限要素法の値は 2400 要素 7401 節点数の 8 節点アイソパラメトリック要素から均等なメッシュを作成し，仮想き裂進展法⁽¹⁷⁾を用いて J 積分値を求めた結果である．また，表 1 は上記の有限要素解を参照解とした場合の EFGM 解の誤差を示してある．この表からも弾塑性問題において 176 節点，651 節点，4941 節点と節点数が増えるにつれ有限要素解に近づいていき，4941 節点でほぼ有限要素解と同等の値が得られていることが分かる．

4. 結 言

本論文では、エレメントフリーガラキン法を弾塑性問題に適用するために、塑性ひずみを含む増分型のエレメントフリーガラキン法の定式化を行い、二次元弾塑性問題へエレメントフリーガラキン法を適用した。これにより、破壊力学パラメータの一つであるJ積分を求めることを試みた。

エレメントフリーガラキン法による弾塑性解析に対する定式化は、有限要素法の場合と同様に行うことができることを示した。

エレメントフリーガラキン法による弾塑性問題の解析結果は有限要素法の解析結果と同程度の精度が得られることを実証し、エレメントフリーガラキン法が弾塑性問題の解析手法として有効であることを示した。

エレメントフリーガラキン法でJ積分の値を計算する際、有限要素法と比較して、積分経路を任意に設定することができ、そのような観点から、有限要素法よりも使いやすく、その精度も有限要素法と同程度であることを示した。このことは、き裂進展を伴う破壊力学問題における破壊力学パラメータを求める手法として有限要素法よりも適していると考えられる。

三次元問題への適用性については、経路積分の経路の設定において有限要素法解析では三次元問題になるとさらに複雑になるので、容易に積分経路を設定できるエレメントフリーガラキン法は三次元問題においてさらに特徴を生かし破壊力学パラメータを求めることができると期待される。

参考文献

- (1) T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin method, *Int. J. Num. Methods Eng.*, 37 (1994), 229-256.
- (2) 宮村倫司, 野口裕久, 横堀一雄, 幾何学的非線形エレメントフリーガラキン法による膜構造の解析, *計算工学講演会論文集2-2* (1997), 387-390.
- (3) T. Belytschko, M. Tabbara, Dynamic fracture using element-free Galerkin methods, *Int. J. Num. Methods Eng.*, 39-6, (1996), 923-938.
- (4) T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, M. Tabbara, Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture, *Int. J. Solids Struct.*, 32-17,18, (1995), 2547-2570
- (5) P. Krysl and T. Belytschko, Modeling of 3D propagating cracks by the element-free galerkin method, *Advances in Computational Engineering Science*, Eds. S.N.Atluri and G.Yagawa (1997), 128-133.
- (6) 野口裕久, 川島徹也, 付帯条件付最小自乗法に基づくグリッドレス法の構造解析への適用, *計算工学講演会論文集*, 2-2, (1997), 391-394.
- (7) T. Belytschko, D. Organ, Y. Krongauz, A coupled finite

- element-free Galerkin method, *Comput. Mech.* 17, (1995), 186-195.
- (8) Zhu, T., S. N. Atluri, A modified collocation method and a penalty formulation for enforcing the essential boundary conditions in the element free Galerkin method, *Comput. Mech.* 21-3, (1998), 211-222.
- (9) 萩原世也, 津乗充良, 池田徹, 柴田朝史, 宮崎則幸, 中垣通彦, エレメントフリーガラキン法の有向グラフによる節点検索法と非線形クリープ問題への適用, *機論*, 64-624, A(1998), 2073-2079.
- (10) Jun, S., Kim, H. G., Im, S., On the application of meshless method to shear band problem, *Metals and Materials*, 4-4, (1998), 847-851.
- (11) H. Askes, R. de Borst and O. Heeres, Conditions for locking-free elasto-plastic analyses in the Element-Free Galerkin method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 173, (1999), 99-109.
- (12) Y. Y. Lu, T. Belytschko, L. Gu, A new implementation of element-free Galerkin method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 113, (1994), 397-414.
- (13) O. C. ツィエンキーヴィッツ, R. L. テイラー, マトリックス有限要素法(1996), 科学技術出版社.
- (14) 谷口健男, FEMのための要素自動分割 - デローニー三角分割法の利用 - (1992), 森北出版.
- (15) 岡村弘之, 線形破壊力学入門, (1997), 培風館.
- (16) 石田誠, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (1976), 培風館.
- (17) Parks, D. M., Virtual Crack Extension: a General Finite Element Technique for J-Integral Evaluation., 1st Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics, (1978), 464-478.