日本機械学会論文集(A 編)
69 巻 687 号(2003-11)

論文 No. 02-1434

異方性異種材界面き裂の応力拡大係数解析*

山長　功*1，池田　徹*2，宮崎則幸*2

Stress Intensity Factor Analysis of a Crack on an Interface between Dissimilar Anisotropic Materials

Koh YAMANAGA, Toru IKEDA*3 and Noriyuki MIYAZAKI

*3 Department of Chemical Engineering, Kyushu University,
6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka-shi, Fukuoka, 812-8581 Japan

A new method is presented for stress intensity factor analysis of a crack between dissimilar anisotropic materials. The virtual crack extension method, which is used with the finite element method, is a powerful tool for estimation of the energy release rate. The virtual crack extension method is applied to stress intensity factor analyses of a crack between dissimilar anisotropic materials. The energy release rate obtained by the virtual crack extension method is separated into individual stress intensity factors, K_{I}, K_{II} and K_{III}, using the principle of superposition. We applied this method to a center interface crack between dissimilar jointed anisotropic plates. The results are compared with analytical solutions. It is found that the energy release rate and stress intensity factors obtained by the present method are very accurate and insensitive to the size of finite elements.

Key Words: Finit Element Method, Stress Intensity Factor, Fracture Mechanics, Anisotropic, Virtual Crack Extension Method, Interface, Mixed Mode

1. 緒　言

異種材界面き裂の応力拡大係数は，異種材界面き裂の定量的評価をする上でエネルギー解放率やJ積分と並んで重要な破壊力学パラメータである．等方性異種材界面き裂問題は，Williams(1)，England(2)，Rice and Sih(3)らにより1960年代に研究され，その弾性解が求められた．異方性異種材界面き裂問題についてもGotoh(4)，Clements(5)，Willis(6)，Bassani and Qu(7)，Wu(8)らなどにより研究されき裂面の開口変位等が明らかにされた．Hwu(9)は，Stroh Formalism(10)を用いて，異方性異種材界面き裂のき裂先端近傍の漸近解を明らかにし，異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を定義した．

これら弾性解によると，異種材界面き裂では，均質体中のき裂と異なり単純なき裂開口モードの荷重が負荷された場合でも，き裂先端付近の応力場は常に混合モード状態となる．しかし，異種材界面き裂の混合モード応力拡大係数を簡易的に評価する方法がないため，応力拡大係数を解析するためには有限要素法などの数値解析手法を用いる必要がある．

Quian and Sun(11)は直交異方性材料の異種材界面き裂の応力拡大係数の数値解析方法を提案しているが，一般的な異方性異種材界面き裂の応力拡大係数の数値解析方法は，まだ存在していない．そこで，本研究では，Hwu(9)により求められた異方性異種材界面き裂先端近傍の漸近解を基に，仮想き裂進展法に重ね合わせの方法を適用したMatos(12)らの方法を適用することで，一般的な異方性異種材界面き裂の応力拡大係数解析を行う方法を開発した．

2. 異方性材料の弾性解

異方性材料の弾性問題を解くための応力関数としては，複数のものがあるが，Stroh Formalism(10,13)によるも

* 原稿受付　2002年12月2日．
*1 (株)村田製作所横浜事業所(〒226-0006 横浜市緑区白山1-18-1)．
*2 正員，九州大学工学研究院(〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)．
E-mail : ikeda@chem-eng.kyushu-u.ac.jp

のが最も洗練されている．本論文で，用いた異方性弾性論は，これに基づいているため，簡単に概要を説明する．

直交座標系 $x_i\,(i=1,2,3)$ において，変位を u_k，応力を σ_{ij} とすると，応力－ひずみ関係，および応力の平衡方程式は次のようになる．

$$\sigma_{ij}=C_{ijks}u_{k,s} \tag{1}$$

$$C_{ijks}u_{k,sj}=0 \tag{2}$$

ここで，C_{ijks} は，弾性構成テンソルである．このとき，Stroh Formalism による変位と応力は，次式の様に示される．

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=\sum_{\alpha=1}^{3}\left\{\mathbf{a}_\alpha f_\alpha(z_\alpha)+\overline{\mathbf{a}_\alpha}f_{\alpha+3}(\overline{z_\alpha})\right\}\\ \boldsymbol{\varphi}&=\sum_{\alpha=1}^{3}\left\{\mathbf{b}_\alpha f_\alpha(z_\alpha)+\overline{\mathbf{b}_\alpha}f_{\alpha+3}(\overline{z_\alpha})\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

ここで, $f_\alpha(z_\alpha)$ $f_{\alpha+3}(\overline{z_\alpha})$ は, 任意の関数であり, z_αは, 次のように示される．

$$z_\alpha=x_1+p_\alpha x_2 \tag{4}$$

また，$\boldsymbol{\varphi}$ は，次式で定義される応力関数 $\varphi_k\,(k=1,2,3)$ よりなるベクトルである．

$$\sigma_{i1}=-\varphi_{i,2},\quad \sigma_{i2}=\varphi_{i,1} \tag{5}$$

式(3), (4)において，p_α はストーの固有値，$\mathbf{a}_\alpha$ と $\mathbf{b}_\alpha$ はストーの固有ベクトルと呼ばれている．p_α と $\mathbf{a}_\alpha$ は，次の特性方程式より求められる固有値と固有ベクトルである．

$$\{\mathbf{Q}+p(\mathbf{R}+\mathbf{R}^T)+p^2\mathbf{T}\}\mathbf{a}=0 \tag{6}$$

ここで $\mathbf{a}$ は，$a_k\,(k=1,2,3)$ よりなるベクトルを，$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{T}$ は，弾性構成マトリックスの下記のような成分により構成される，マトリックスを示す．

$$Q_{ik}=C_{i1k1},\ R_{ik}=C_{i1k2},\ T_{ik}=C_{i2k2} \tag{7}$$

また，ベクトル $\mathbf{b}$ は，次の関係より求められる．

$$\mathbf{b}=(\mathrm{R}^T+p\mathbf{T})\mathbf{a}=-\frac{1}{p}(\mathbf{Q}+p\mathbf{R})\mathbf{a} \tag{8}$$

Stroh の固有値 p は，3つの共役な複素数の組となることがわかっており，p_α と $\mathbf{a}_\alpha$ を固有値と対応する固有ベクトルであるとすると，次のようにおける．

$$\left\{\begin{aligned}p_{\alpha+3}&=\overline{p_\alpha} && (\mathrm{Im}\,p_\alpha>0)\\ \mathbf{a}_{\alpha+3}&=\overline{\mathbf{a}_\alpha}\\ \mathbf{b}_{\alpha+3}&=\overline{\mathbf{b}_\alpha} && (\alpha=1,2,3)\end{aligned}\right. \tag{9}$$

ここでImは虚部を示し, $\overline{()}$ は, 共役な複素数を示す．また，式(3)の任意関数 $f_\alpha(z_\alpha)$, $f_{\alpha+3}(\overline{z_\alpha})$ は，ほとんどの弾性問題において同じ関数となり，次のように置き換えることができる．

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&=\mathbf{Af}(\mathrm{z})+\overline{\mathbf{Af}(\mathrm{z})}\\ \boldsymbol{\varphi}&=\mathbf{Bf}(\mathrm{z})+\overline{\mathbf{Bf}(\mathrm{z})}\end{aligned} \tag{10}$$

ここで

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]\ \mathbf{B}=\left[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\right] \tag{11}$$

である．また，次式で定義される，Barnett-Lothe テンソル(1-4)と呼ばれるテンソルが，しばしば，異方性弾性体の弾性解の中に現れる．

$$\mathbf{S}=i(\mathbf{AB}^{\mathrm{T}}-\overline{\mathbf{AB}^T}),\ \mathbf{L}=-2i\mathbf{BB}^T \tag{12}$$

この Barnett-Lothe テンソルの成分は，実数となる．

3. 異方性異種材界面き裂の応力拡大係数

応力拡大係数ベクトル$\mathbf{K}$，エネルギー解放率G，開口変位$\Delta\mathbf{u}$は，異方性異種材界面き裂を定量的に評価する上で重要なパラメータである．Hwu は，異方性異種材界面き裂先端近傍の漸近解を導くと共に，従来の均質体中のき裂と互換性をもつ異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を定義した(9)．

図1に示すような，異方性異種材界面き裂の一般解は，Stroh Formalism を用いると，次式のように示される(9)．

$$\left\{\begin{aligned}\mathbf{u}_1&=\mathbf{A}_1\mathbf{f}_1(\mathrm{z})+\overline{\mathbf{A}_1\mathbf{f}_1(\mathrm{z})}\\ \boldsymbol{\varphi}_1&=\mathbf{B}_1\mathbf{f}_1(\mathrm{z})+\overline{\mathbf{B}_1\mathbf{f}_1(\mathrm{z})}\quad \text{,in Material 1}\end{aligned}\right.$$
$$\left\{\begin{aligned}\mathbf{u}_2&=\mathbf{A}_2\mathbf{f}_2(\mathrm{z})+\overline{\mathbf{A}_2\mathbf{f}_2(\mathrm{z})}\\ \boldsymbol{\varphi}_2&=\mathbf{B}_2\mathbf{f}_2(\mathrm{z})+\overline{\mathbf{B}_2\mathbf{f}_2(\mathrm{z})}\quad \text{,in Material 2}\end{aligned}\right. \tag{13}$$

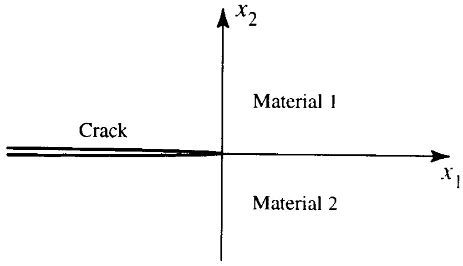


Fig. 1 An interface crack between dissimilar anisotropic media.

ここで，添え字1，2は材料1 ($x_2>0$)，材料2 ($x_2<0$) を示す．式(13)において $\mathbf{f}_1(z), \mathbf{f}_2(z)$ は，次のような関数である．

$$\mathbf{f}_1(z)=\mathbf{B}_1^{-1}\boldsymbol{\psi}(z)$$
$$\mathbf{f}_2(z)=\mathbf{B}_2^{-1}\overline{\mathbf{M}}^{*-1}\mathbf{M}^{*}\boldsymbol{\psi}(z) \tag{14}$$

き裂先端近傍において，$\boldsymbol{\psi}$ は，次式で与えられる[9]．

$$\boldsymbol{\psi}(z)=\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle\frac{2z^{(1/2+i\varepsilon_\alpha)}}{1+2i\varepsilon_\alpha}\right\rangle\right\rangle \boldsymbol{p}_0 \tag{15}$$

$$p_0=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left\langle\left\langle\frac{e^{\pi\varepsilon_\alpha}}{\cosh(\pi\varepsilon_\alpha l_k^{i\varepsilon_\alpha})}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{16}$$

ここで，<< >>は，$\alpha=1,2,3$ なる対角成分をもつ，対角マトリックスであることを示す．$\mathbf{M}^*$ は2つの材料により決定する定数で，次のように定義される．

$$\mathbf{M}^*=\mathbf{D}-i\mathbf{W} \tag{17}$$

ここで，$\mathbf{D}$，$\mathbf{W}$ は，次式で示される．

$$\mathbf{D}=\mathbf{L}_1^{-1}+\mathbf{L}_2^{-1}\ ,\ \mathbf{W}=\mathbf{S}_1\mathbf{L}_1^{-1}-\mathbf{S}_2\mathbf{L}_2^{-1} \tag{18}$$

$\mathbf{S}, \mathbf{L}$ は，材料1，2のBarnett-Lotheテンソルである．また，$\delta_\alpha, \lambda_\alpha$ は，次の固有関係を満たす固有値と固有ベクトルである．

$$(\mathbf{M}^*+e^{2i\pi\delta}\overline{\mathbf{M}}^*)\boldsymbol{\lambda}=0 \tag{19}$$

固有値 δ_α はTingにより次のように求められている[15]．

$$\delta_\alpha=-\frac{1}{2}+i\varepsilon_\alpha,\quad \alpha=1,2,3 \tag{20}$$

$$\varepsilon_1=\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta},\ \varepsilon_2=-\varepsilon,\ \varepsilon_3=0,$$
$$\beta=[-\frac{1}{2}tr(\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1})^2]^{1/2} \tag{21}$$

$\boldsymbol{\Lambda}$ は，式(19)より求められる固有ベクトルよりなるマトリックスである．

$$\boldsymbol{\Lambda}=[\boldsymbol{\lambda}_1\ \boldsymbol{\lambda}_2\ \boldsymbol{\lambda}_3] \tag{22}$$

式(16)の $\mathbf{K}$ は，次式で定義される，異方性異種材界面き裂の応力拡大係数である．

$$\mathbf{K}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle(r/l_k)^{-i\varepsilon_\alpha}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\varphi}' \tag{23}$$

ここで，応力拡大係数ベクトルは，次式のようなモードII，I，IIIの成分をもつ．

$$\mathbf{K}=\begin{Bmatrix}K_{II}\\K_I\\K_{III}\end{Bmatrix} \tag{24}$$

また，r はき裂先端からの距離，l_k は任意の代表長さである．均質体中のき裂の場合，モードI，II，IIIの応力場は独立しており，き裂前方の図1における x_2 軸上の応力の比，$\sigma_{12}/\sigma_{22}, \sigma_{23}/\sigma_{22}$ は，常に $K_{II}/K_I, K_{III}/K_I$ に一致する．しかしながら，異方性異種材界面き裂の場合，一般的にモードI，II，IIIの応力場は連成しており，独立したモードは，存在しない．例外として，相方の材料が横等方性を持っている場合には，モードIIIのみが独立となり，モードIとIIが連成する．

式(23)より，明らかに σ_{12}/σ_{22} と σ_{23}/σ_{22} が K_{II}/K_I と K_{III}/K_I 一致するのは $r=l_k$ のときである．すなわち，l_k をある値に選ぶということは，応力拡大係数 K_{II}, K_I と K_{III} に $r=l_k$ での各応力の比を代表させることを意味する．異種材界面き裂の応力拡大係数を混合モードの破壊靭性値として利用するためには，き裂先端から同じ位置での各応力での比を表すため，l_k が同じ値のときの応力拡大係数を用いるべきである．本研究では，これまでの等方性異種材界面き裂の研究[16]を参考にして，便宜的に $l_k=10\mu$m として計算している．また l_k を l_k' に変化させた場合の応力拡大係数の変換式は次式で示される．

$$\mathbf{K}'=\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle\left(\frac{l_k'}{l_k}\right)^{i\varepsilon_\alpha}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{25}$$

また，図1の x 軸上での応力拡大係数を使ったき裂近傍の応力場と開口変位は，次のようになる[9]．

$$\boldsymbol{\varphi}'=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle(r/l_k)^{i\varepsilon_\alpha}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{26}$$

$$\Delta\mathbf{u}=\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\boldsymbol{\Lambda}^{-T}\left\langle\left\langle\frac{(r/l_k)^{i\varepsilon_\alpha}}{(1+2i\varepsilon_\alpha)\cosh(\pi\varepsilon_\alpha)}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{27}$$

一方，エネルギー解放率 G と応力拡大係数 $\mathbf{K}$ の間には，次のような関係がある[9]．

$$G=\frac{1}{4}\mathbf{K}^T\mathbf{E}\mathbf{K},\quad \mathbf{E}=\mathbf{D}+\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W} \tag{28}$$

4. 解析方法

4.1 異方性弾性解析のための二次元有限要素法

Stroh Formalismで用いられる二次元近似は，$\varepsilon_{33}=0$ とした平面ひずみ近似で，応力－ひずみ関係は次式のよ

うになる．

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ & C_{22} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ & & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ & Sym. & & C_{55} & C_{56}\\ & & & & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix} \tag{29}$$

ここで，σ_{33}は，次式で示される．

$$\sigma_{33}=\begin{bmatrix}C_{13} & C_{23} & C_{43} & C_{53} & C_{63}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix} \tag{30}$$

このときの，ひずみ－変位関係は，変位がx, yのみに依存することから，次のように表される．

$$\left\{\begin{array}{ll}\varepsilon_{11}=\dfrac{\partial u}{\partial x} & 2\varepsilon_{23}=\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \varepsilon_{22}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & 2\varepsilon_{31}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \varepsilon_{33}=0 & 2\varepsilon_{12}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{array}\right. \tag{31}$$

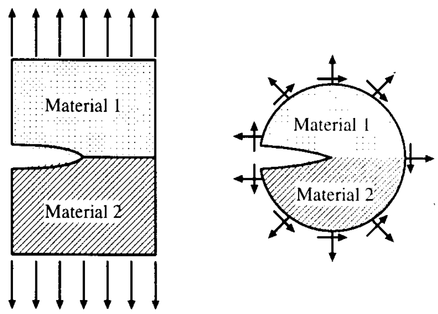
したがって，通常の平面ひずみ近似と異なり，各節点の自由度は3となる．本研究では，式(29)～式(31)に基づいた二次元異方性線形弾性有限要素法を用いて解析を行った．

4.2 仮想き裂進展法　仮想き裂進展法によれば，き裂のエネルギー解放率Gは次式で与えられる(17)．

$$G=-\left(\frac{dU}{da}\right)\approx-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_F}\mathbf{u}_i^T\frac{\Delta\mathbf{k}_i}{\Delta a}\mathbf{u}_i \tag{32}$$

ここで，Uは系のポテンシャルエネルギー，aはき裂長さで，Δaは微小き裂進展量，$\Delta \mathbf{k}_i$はき裂先端を取り囲む領域における有限要素$i=(1\sim N_F)$のΔaに伴う要素剛性マトリックスの変化量，$\mathbf{u}_i$は要素の節点変位である．

4.3 仮想き裂進展法による異方性異種材界面き裂の応力拡大係数の解析　3章で述べたとおり，異方性異種材界面き裂の場合，荷重条件が単一モードであっても，応力拡大係数は混合モード状態となり，モード分離が必要となる．Matos(12)らは，Yau and Wang(18)のM積分法の考え方を取り入れ，仮想き裂進展法によって，等方性異種材界面き裂の応力拡大係数解析を行う方法を提案している．本研究では，このMatosらの方法を用いることで，解析を行った．



(1) Unknown problem　　(2)Known problmen

Fig. 2 Superposition of a known problem on an unknown problem.

まず，図2に示すように，解析対象に，あらかじめ変位・応力・応力拡大係数が既知な解を重ね合わせることを考える．解析対象を状態(1)，重ね合わせる既知の解を状態(2)，両者を重ね合わせた状態を(1+2)とすると，状態(1+2)の任意の点の変位，応力，応力拡大係数に次のような重ね合わせの法則が成り立つ．

$$\left\{\begin{array}{l}\mathbf{u}^{(1+2)}=\mathbf{u}^{(1)}+\mathbf{u}^{(2)}\\ \boldsymbol{\sigma}^{(1+2)}=\boldsymbol{\sigma}^{(1)}+\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\\ \mathbf{K}^{(1+2)}=\mathbf{K}^{(1)}+\mathbf{K}^{(2)}\end{array}\right. \tag{33}$$

ここで，$\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{K}$は，それぞれ，変位，応力および応力拡大係数である．

したがって，式(28)より状態(1＋2)のエネルギー解放率は次のようになる．

$$\begin{aligned}G^{(1+2)}&=\frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)}+\mathbf{K}^{(2)}\right\}^T\mathbf{E}\left\{\mathbf{K}^{(1)}+\mathbf{K}^{(2)}\right\}\\ &=G^{(1)}+G^{(2)}+\frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(2)}+\mathbf{K}^{(2)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(1)}\right\}\end{aligned} \tag{34}$$

これを変形すると次式が得られる．

$$\frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(2)}+\mathbf{K}^{(2)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(1)}\right\}=G^{(1+2)}-G^{(1)}-G^{(2)} \tag{35}$$

式(35)において，左辺の$\mathbf{E}, \mathbf{K}^{(2)}$および右辺の$G^{(2)}$は既知である．また$G^{(1)}$，$G^{(1+2)}$は，$\mathbf{u}^{(1)}$および，$\mathbf{u}^{(1+2)}$より式(32)の仮想き裂進展法より求めることができる．したがって，3つの独立した既知の解を解析対象に重ね合わせることによって，式(35)より$\mathbf{K}^{(1)}$を求めることができる．例えば，重ね合わせる既知の解として，異種材界面き裂の漸近解式(13)～(22)を用いる場合を考える．こ

の漸近解について，既知の解 (a) [$K_{\mathrm{II}}=1, K_{\mathrm{I}}=0, K_{\mathrm{III}}=0$], (b) [$K_{\mathrm{II}}=0, K_{\mathrm{I}}=1, K_{\mathrm{III}}=0$], (c) [$K_{\mathrm{II}}=0, K_{\mathrm{I}}=0, K_{\mathrm{III}}=1$] の場合を重ね合わせると，式(35)より，次式の連立一次方程式を求めることができる．

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{II}^{(1)} \\ K_{I}^{(1)} \\ K_{III}^{(1)} \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} G_{(a)}^{(1+2)} - G^{(1)} - G_{(a)}^{(2)} \\ G_{(b)}^{(1+2)} - G^{(1)} - G_{(b)}^{(2)} \\ G_{(c)}^{(1+2)} - G^{(1)} - G_{(c)}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

これを解くことで，解析対象の応力拡大係数$K_{\mathrm{I}}^{(1)}$, $K_{\mathrm{II}}^{(1)}$, $K_{\mathrm{III}}^{(1)}$が得られる．

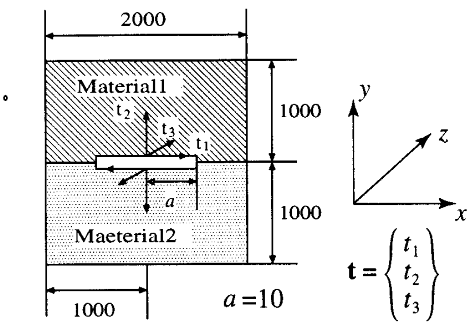
5. 解析精度

4章で述べた解析手法の精度を検討するために，図3に示すように，中央き裂を持つ異種材接合板について，き裂面中央に集中荷重が作用する問題 (Sample 1) と，遠方で一様応力を受ける問題 (Sample 2) を考える．有限要素法解析は，8節点アイソパラメトリック要素を用いて，z方向のひずみのみ拘束した．材料の組み合わせとして，表1に示す材料定数を使い，表2の組み合わせについて解析を行った．Argonite 及び Topaz は直交異方性材料，GSO 及び $CaSO_4$ は単斜晶材料である．また，要素分割の精粗が解析値に及ぼす影響を調べるために，表3に示すように Mesh 1 から Mesh 3 までの3種類の要素分割を用いて，応力拡大係数の解析精度を調べた．

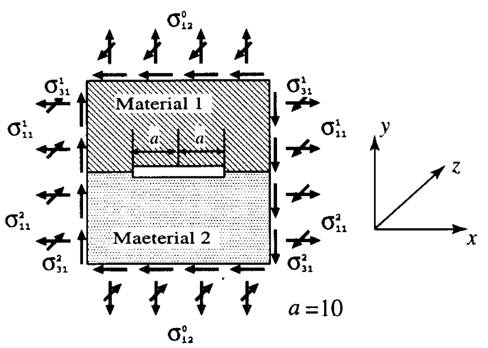
Sample 1 と Sample 2 の理論解は，いずれも Hwu により求められている[19]．Sample 1 の理論解は，次のようになる．

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{\frac{a+c}{a-c}}\ \mathbf{\Lambda} \ll \left[\frac{l_k(a+c)}{2a(a-c)}\right]^{i\varepsilon_\alpha} \cosh \pi\varepsilon_\alpha \gg \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{t} \quad (37)$$

ここで，aはき裂長さ，cは集中荷重をかけている点のき裂中心からの距離，$\mathbf{t}$は，図3(1)に示されるき裂面上



(1) Sample1 (Concentrated forces on crack surfaces) a=10



(2) Sample2 (Uniform Load)

Fig.3 Center interface cracks between jointed semi-infinite dissimilar anisotroipic plates.

Table 1 Elastic stiffness (GPa).

Argonite	Topaz	GSO	$CaSO_4$
160	281	223	94.5
36.6	126	98.5	28.2
2	84.6	98.5	28.2
0	0	8.4	-11
87	349	150	65.2
15.9	88.1	102	32
0	0	33.3	6.9
85	295	251	50.2
0	0	-6.1	-7.5
41.3	108	78.8	8.6
0	0	6.6	-1.1
25.6	133	68.8	32.4
42.7	101	82.7	10.8

Table 2 Combinations of materials.

	Material 1	Material 2
Case 1	Argonite	Topaz
Case 2	Argonite	GSO
Case 3	GSO	$CaSO_4$

Table3 Finite element meshes for analyses.

Model	Number of nodes	Number of elements	m/a
Mesh1	5532	1816	0.2
Mesh2	9658	3185	0.1
Mesh3	22250	7369	0.05

m: size of the smallest element around a crack tip

にかかる集中荷重である．

また，Sample 2 の理論解は，次のようになる．

$$\mathbf{K}=-\sqrt{\pi a}\boldsymbol{\Lambda} << (1+2i\varepsilon_\alpha)(2a/l_k)^{-i\varepsilon_\alpha} >> \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{t}^\infty \tag{38}$$

ここで，a はき裂長さ，$\mathbf{t}^\infty$は次式で示される無限遠方での一様応力を示す．

$$\mathbf{t}^\infty=\sigma_{i2}^1=\sigma_{i2}^2=\begin{Bmatrix}\sigma_{12}^0\\ \sigma_{22}^0\\ \sigma_{32}^0\end{Bmatrix} \tag{39}$$

このとき，側面にかかる無限遠方での一様応力 $\sigma_{i1}{}^1$ と $\sigma_{i1}{}^2$ は，次式で示される．

$$\begin{aligned}\sigma_{i1}^1&=-\mathrm{Re}[2\mathbf{B}_1 << p_\alpha >> \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{t}^*]\\ \sigma_{i1}^2&=-\mathrm{Re}\left[2\mathbf{B}_2 << p_\alpha >> \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{M}^{*-1}\mathbf{M}^*\mathbf{t}^*\right]\\ \mathbf{t}^*&=(\mathbf{I}+\mathbf{M}^{*-1}\mathbf{M}^*)^{-1}\mathbf{t}^\infty\end{aligned} \tag{40}$$

ここで，上付き添え字1は上方の材料であることを示し，2は下方の材料であることを示す．Sample 1 について集中荷重を $\mathbf{t}=[0,\ 1(\mathrm{N}),\ 0]$， $\mathbf{t}=[1(\mathrm{N}),\ 0,\ 0]$， $\mathbf{t}=[0,\ 0,\ 1(\mathrm{N})]$ の3ケース，Sample 2 について，無限遠方での一様応力を $\mathbf{t}^\infty=[0,\ 1(\mathrm{MPa}),\ 0]$ ， $\mathbf{t}^\infty=[1(\mathrm{MPa}),\ 0\ \ 0]$，$\mathbf{t}^\infty=[1(\mathrm{MPa}),\ 0\ \ 0]$ の3ケースについて解析した．各ケースの理論解を表4，5に示す．

実際に式(32)からエネルギー解放率を計算するにあたっては，有限要素の節点を移動して仮想的にき裂を進展させる必要がある．この際の仮想き裂進展量 Δa は，倍精度計算において，き裂長さの $10^{-4}\sim10^{-10}$ 倍程度にとれば良いことが経験上わかっている[20]．あまり進展量が大きいと差分近似が成り立たなくなって精度が低下し，極端に進展量が小さいと計算時に桁落ちが生じてしまうので，変形させる有限要素一辺の長さの 10^{-9} 倍程度にとることが推奨される．また，仮想き裂進展のための有限要素の節点の移動方法としては，図4のように，き裂先端に接する有限要素は変形せずに剛体的に移動させ，その周囲の斜線部の有限要素を変化させた方が，き裂先端に接する有限要素を変化させ

Table 4 Analytical values of energy release rate and stress intensity factors of Sample 1.

	Load direction	G 10^{-4}J/m^2	K_{II}	K_{I}	K_{III}
			10^{-3}MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, l_k= 10μm		
Case1	2	2.22	−2.47	5.26	0.0
	1	1.81	5.26	2.04	0.0
	3	3.11	0.0	0.0	5.64
Case2	2	2.89	1.43	5.48	0.70
	1	2.18	5.53	−1.07	−0.06
	3	3.59	−0.09	−0.86	5.60
Case3	2	5.07	1.31	5.52	−0.68
	1	4.14	5.55	−0.97	0.05
	3	6.23	0.06	0.65	5.61

Table 5 Analytical values of energy release rate and stress intensity factors of Sample 2.

	Load direction	G 10^{-1}J/m^2	K_{II}	K_{I}	K_{III}
			10^{-1}MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, l_k= 10μm		
Case1	2	2.16	−0.58	1.70	0.00
	1	1.76	1.70	0.48	0.00
	3	3.07	0.00	0.00	1.77
Case2	2	2.83	0.33	1.74	0.16
	1	2.14	1.75	−0.25	−0.01
	3	3.53	−0.02	−0.20	1.76
Case3	2	4.97	0.30	1.75	−0.16
	1	4.07	1.76	−0.22	0.01
	3	6.14	0.01	0.15	1.77

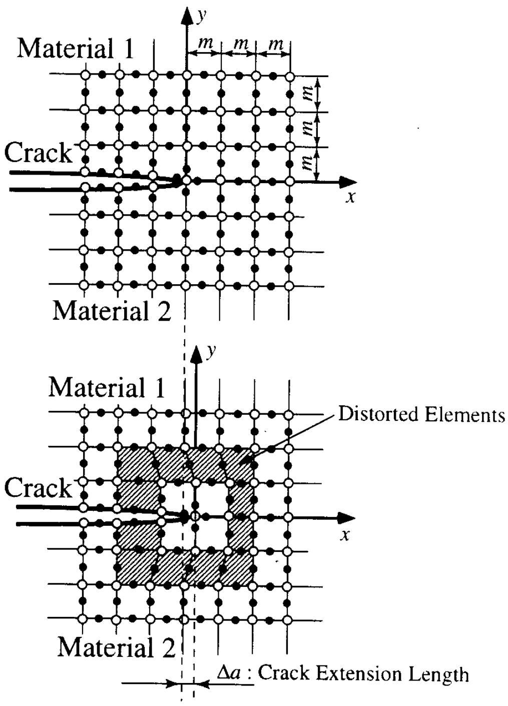


Fig. 4 Distorted finite elements around a crack tip for crack extension.

る場合より高い精度が得られることが解っているので，本解析では，すべて図4のように移動させた．式(32)において，図4の斜線部の外側の要素については，値が0となるため，斜線部の内側の要素についてのみ計算を行えば良い．

以上の条件で求めた，Mesh 3における解析値の理論値に対する誤差を表6，表7に示す．ここでは，応力拡大係数の解析誤差は次式のように計算した．

$$E_i=\frac{K_i-K_{i\,exact}}{\sqrt{K^2_{\mathrm{I}\,exact}+K^2_{\mathrm{II}\,exact}+K^2_{\mathrm{III}\,exact}}}\ (i=\mathrm{I,II,III}) \qquad (41)$$

ここで，E_iは解析誤差(%)で，$K_{i\,exact}$は応力拡大係数の理論解である．結果を見ると，エネルギー解放率，応力拡大係数の解析値は，ともにほとんどの場合で1%以内のよい精度を示している．

Table 6 Errors of the energy release rates and stress intensity factors obtained by Mesh 3 for Sample 1.

	Load direction	G	K_{II}	K_{I}	K_{III}
Case1	2	−0.22	0.01	−0.11	
	1	−0.33	−0.17	−0.03	
	3	−0.18			−0.09
Case2	2	0.08	−0.09	0.06	−0.03
	1	−0.37	−0.16	0.11	0.02
	3	−0.18	0.03	0.05	−0.09
Case3	2	−0.06	−0.03	−0.02	0.03
	1	−0.98	−0.51	0.02	0.06
	3	−0.25	−0.06	−0.04	−0.11

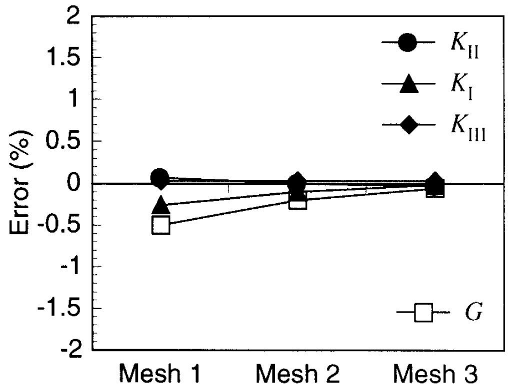
(%)

Table 7 Errors of the energy release rates and stress intensity factors obtained by Mesh 3 for Sample 2.

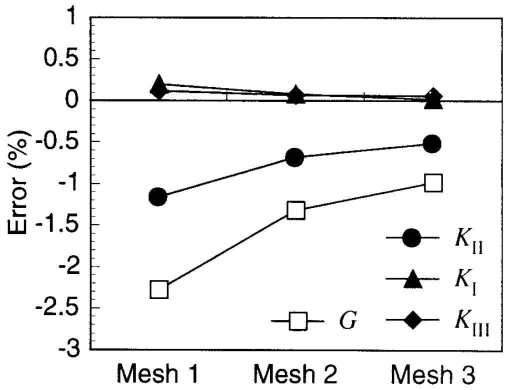
	Load direction	G	K_{II}	K_{I}	K_{III}
Case1	2	−0.27	0.03	−0.13	
	1	−0.26	−0.13	−0.03	
	3	−0.20			−0.10
Case2	2	0.03	−0.12	0.04	−0.04
	1	−0.25	−0.11	0.07	0.01
	3	−0.20	0.02	0.07	−0.09
Case3	2	−0.07	−0.03	−0.03	0.03
	1	−0.79	−0.42	−0.05	0.04
	3	−0.24	−0.07	−0.04	−0.11

(%)

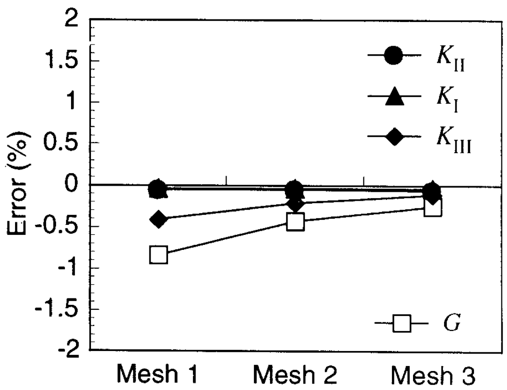
次に，要素分割の精粗が解析結果にどのように影響するかを調べるために，Case 3についての解析誤差のメッシュによる変化を図5と図6に示した．図5，6を見ると，面内せん断荷重のケース(Load direction 1)を除くと，最小の要素がき裂長さに対して1/5のサイズしかないMesh 1においても，応力拡大係数の解析誤差



(a) Load direction 2



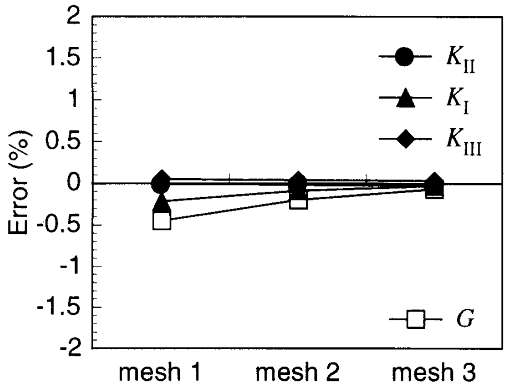
(b) Load direction 1



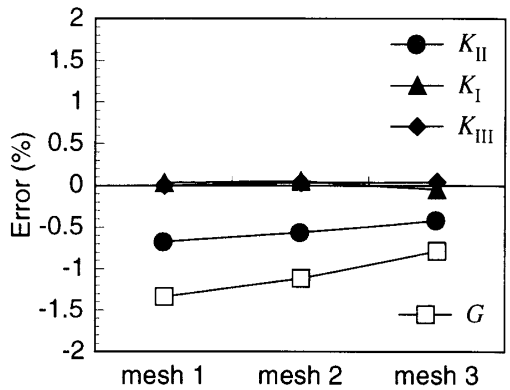
(c) Load direction 3

Fig. 5 Errors of the energy release rates and stress intensity factors obtained by the present method for Case 3 in Sample 1.

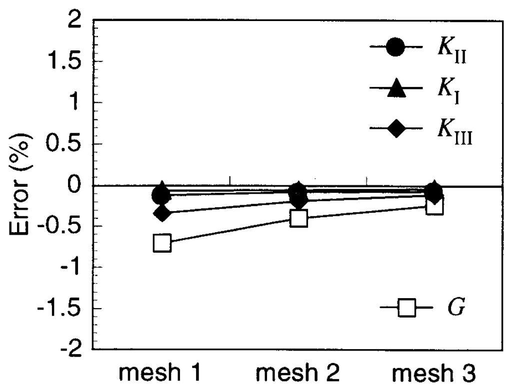
は，ほぼ0.5%以内に，き裂長さに対して1/20のMesh 3においては，ほぼ0.1%以内におさまっている．また，要素分割を細かくすれば確実に精度は上昇している．最も細かいMesh 3においても，最小要素法は，き裂長さの1/20もあることから，荒い要素分割ににもかかわらず，非常に精度がよいことが判る．ただし，面内せん断荷重を受ける，単斜晶材料間のき裂の場合は，その他の場合に比べて，やや精度が低い傾向が見られた．



(a) Load direction 2



(b) Load direction 1



(c) Load direction 3

Fig. 6 Errors of the energy release rates and stress intensity factors obtained by the present method for Case 3 in Sample 2.

7. 結　言

異方性異種材界面き裂の変位の一般解を利用して，仮想き裂進展法に重ね合わせの方法を適用することで，異方性異種材界面の応力拡大係数を解析する手法を開発した．この手法を，中央き裂を持つ異種材接合板について，き裂面中央に集中荷重がある問題と，遠方で一様応力を受ける問題について適用し，得られた解析解と理論解を比較した．本手法を用いることで，一般的な異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を精度良く求められることを確認した．

本研究の遂行にあたり，日本学術振興会科学研究費補助金の助成を受けた．記して感謝する．

文　献

(1) Williams, M. L., *Bull. Seism. Soc. Am.*, **49** (1959), 199-204.

(2) England, A. H., *J. Appl. Mech.*, **32** (1965), 393-416.

(3) Rice, J. R. and Sih, G. C., *J. Appl. Mech.*, **32** (1965), 418-423.

(4) Gotoh, M., *Int. J. Fract. Mech.*, **3** (1967), 253-265.

(5) Clements, D. L., *Int. J. Engng Sci.*, **9** (1971), 257-265.

(6) Willis, J. R., *J. Mech. Phys. Solids*, **19** (1971), 353-.

(7) Bassani, J. L. and Qu, J., *J. Mech. Phys. Solids*, **37** (1989), 435-453.

(8) Wu, K. C., *J.Appl. Mech.*, **57** (1990), 882-886.

(9) Hwu, C., *Int. J. Fract.*, **52** (1991), 239-256.

(10) Stroh, A. N., *Phil. Mag.*, **7** (1952), 625-646.

(11) W.Qian and C. T. Sun, *Int. J. Solids Struct.*, **35** (1997), 3317-3330.

(12) Matos, P. P. L., ほか３名, *Int. J. Fract.*, **40** (1989), 235-254.

(13) Ting, T.C.T., *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications, Oxford Univ. Press*, (1996), 134-263.

(14) Barnett, D. M. and Lothe, *J. Phys. Norv.*, **7** (1973), 13-19.

(15) Ting, T.C.T., *Int.J. Solids Struct.*, **22** (1986), 965-983.

(16) 池田ほか３名, 機論, **58**-555, A (1992), 2080-2087.

(17) Parks, D. M., *Int. J. Fract.*, **10** (1974), 487-502.

(18) Yau, J. F. and Wang, S. S., *Eng. Fract. Mech.*, **20**-3 (1984), 423-432.

(19) Hwu, C., *Int. J. Solids Struct.*, **30** (1993), 301-312.

(20) 宮崎ほか３名, 機論, **57**-534, A (1991), 373-157.