日本機械学会論文集(A編)
70巻691号(2004-3)

論文 No. 03-0241

エレメントフリーガラーキン法の動的き裂問題への適用に関する考察*

萩原世也*1, 津乗充良*2
池田徹*3, 宮崎則幸*3

Study of Application of Element-Free Galerkin Method to Dynamic Crack Problem

Seiya HAGIHARA*4, Mitsuyoshi TSUNORI,
Toru IKEDA and Noriyuki MIYAZAKI

*4 Department of Mechanical Engineering, Saga University, 1 Honjocho, Saga-shi, Saga, 840-8502 Japan

The objective of this study is to apply the element-free Galerkin method (EFGM) to the dynamic crack problem for evaluating dynamic fracture mechanics parameters. The EFGM is first applied to a stationary crack problem under dynamic loading. Then we apply the EFGM to a generation phase problem of dynamic crack growth. Both results obtained from the EFGM analysis are compared with those of the FEM analysis using a very fine finite element mesh or the moving singular element technique. It is found that the EFGM analysis has enough accuracy both for a stationary crack problem under dynamic loading and for a dynamic crack problem, compared with the FEM analysis. Moreover, the EFGM has the advantage of selecting arbitrary integral paths or moving integral paths for the J-integral without restriction of elements in the EFGM.

Key Words: Computational Mechanics, Numerical Analysis, Fracture Mechanics, Element-Free Galerkin Method, Meshfree Method, Dynamic Analysis, Crack Propagation

1. 緒言

き裂進展問題は構造設計の観点から重要な問題であり，さらにき裂進展を数値解析によりシミュレートすることは重要な問題である．き裂進展問題の解析は静的・動的問題において有限要素法(FEM)などにより行われているが，FEMが節点－要素コネクティビティを必要とするため，移動特異要素などを用いる(1)(2)，デローニー三角分割法を用いてリメッシングを行う(3)などといった特別な工夫が必要となる．また，破壊力学パラメータを計算する上で精度を確保するためには，要素に依存した経路を取らざるを得ないなどの問題があるため，前処理として煩雑な経路選択をユーザが行う必要がある．さらに結果に後処理を行わなければならないなど，FEMをき裂進展問題に適用する上で大きな障害となっている．

このような理由によりメッシュフリー法がき裂進展問題に対して適用できるようになることが期待されている．著者らは，これまでに生成系き裂進展問題の弾塑性静的解析にBelytschkoら提案したエレメントフリーガラーキン法(EFGM)(4)を材料非線形問題に適用し(5)(6)，破壊力学パラメータを求める解析を行ってきた(7)．き裂進展問題においてEFGMは移動最小自乗法(MLSM)を用いるため，任意の点において一階微分量であるひずみや応力の連続性を確保することができる．これにより微分量の計算を必要とする種々の破壊力学パラメータを任意の移動する積分経路を用いて計算することができ，高速き裂進展問題に対してもFEMよりも柔軟に対応することができると考えられる．

一方，EFGMの基底関数にき裂先端近傍の変位関数を持たせた解析(8)や，同様に有限要素法の変位関数にき裂近傍の関数を組み込んだFEMにより静的き裂問題の解析(9)が行われ，精度を向上させる研究がなされている．ただし，このような特殊な解析を行う前に，EFGMでどの程度の解析を行うことができるのか，確認する必要があると考えられる．

Belytschkoら(10)はEFGMは動的き裂進展解析を行っているが，本格的に動的破壊力学パラメータの計算を行い，他の解析法との比較を行い，EFGMの動的破壊問題に対する適用性を含めた検討を行ってはいない．動的破壊力学パラメータの正確に計算を行うことは，動的破壊

* 原稿受付 2003年3月7日．
*1 正員，佐賀大学理工学部(〒840-8502 佐賀市本庄町1)．
*2 正員，石川島播磨重工業(株)基盤技術研究所(〒235-8501 横浜市磯子区新中原町1)．
*3 正員，九州大学大学院工学研究院(〒812-8581 福岡市東区箱崎6-10-1)．
E-mail: hagihara@me.saga-u.ac.jp

力学問題において非常に重要である.特にき裂進展問題においては,き裂の進展方向を決定するために重要なパラメータとなり,き裂進展方向を計算で求めるとき用いる有力な解析手法となりうる.

本論文では,EFGMを動的破壊力学問題に適用するために,動的荷重を受ける中央き裂板の解析を行い,経路積分を伴う動的破壊力学パラメータを求め,FEMから得られた結果と比較検討を行い,EFGMが動弾性き裂進展問題にも有効な解析手法であることを示す.

2. 解析理論

2.1 支配方程式 本論文では解析手法としてEFGMを用いる.EFGMでは有限要素法と同様な仮想仕事の原理を支配方程式としている.動的問題における増分形の仮想仕事の原理は次式のように表される.

$$\int_V [\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\sigma}+\Delta\boldsymbol{\sigma}) + \delta\Delta\boldsymbol{u}^T \rho\, (\ddot{\boldsymbol{u}}+\Delta\ddot{\boldsymbol{u}})]dV - \int_V \delta\Delta\boldsymbol{u}^T(\bar{\boldsymbol{F}}+\Delta\bar{\boldsymbol{F}})\,dV - \int_S \delta\Delta\boldsymbol{u}^T(\bar{\boldsymbol{T}}+\Delta\bar{\boldsymbol{T}})\,dS = 0 \quad (1)$$

ここで,$\boldsymbol{\sigma}$,$\boldsymbol{\varepsilon}$は応力テンソル成分,ひずみテンソル成分をそれぞれ縦に並べたベクトルを表し,$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル,$\ddot{\boldsymbol{u}}$は加速度ベクトル,$\boldsymbol{F}$ は体積力ベクトル,$\boldsymbol{T}$ は表面力ベクトルを表している.$\Delta\boldsymbol{\sigma}$,$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$,$\Delta\boldsymbol{u}$,$\Delta\ddot{\boldsymbol{u}}$,$\Delta\boldsymbol{F}$,$\Delta\boldsymbol{T}$ は,それぞれその増分を表し,δは変分を,$()^T$は転置を表している.

2.2 内挿関数の作成 EFGMでは,積分領域内の評価点における形状関数(近似関数)を,評価点から定めた影響半径の領域内に分布する近傍の節点値から,MLSM(4)を用いて局所的に作成する.本論文では次式に示す線形基底$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$を用いて領域内の任意の評価点$(\boldsymbol{x,y})$での関数$u^h(\boldsymbol{x})$ を近似的に表す.

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})^T = [1,x,y] \quad (2)$$

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_j^m p_j(\boldsymbol{x})a_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \quad (3)$$

ただしm は基底の項数であり,ここでは$m=3$ である.未定係数$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$は,次式で定義される評価関数$R$を最小化させるように決定する.

$$R = \sum_I^n w_I(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)\left[\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})^T\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - u_I\right]^2 \quad (4)$$

ここで,$\boldsymbol{n}$は評価点$\boldsymbol{x}$ の近傍に位置する節点数であり,$\boldsymbol{w}$は重み関数である.本論文では重み関数にはよく使用される次式の4次のスプライン型の関数を用いた.

$$w_I(d_I) = 1.0 - 6.0\left(d_I/d_{mI}\right)^2 + 8.0\left(d_I/d_{mI}\right)^3 - 3.0\left(d_I/d_{mI}\right)^4 \quad (5)$$

ここで,$d_I = \left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I\right|$ である.ただし,d_{mI} は影響半径であり,評価点を含む三角形の各頂点と評価点の距離の最大の値にある係数をかけた値とした.

2.3 EFGM定式化 MLSMにより得られた内挿関数を用いて式(1)の離散化を行い,時間積分法にNewmark-β1/4法を用いると,以下のEFGMの増分形の動弾性剛性方程式が得られる.

$$\boldsymbol{M}\,\Delta\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{k}^e\,\Delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}_S + \boldsymbol{f}_V + \boldsymbol{r} \quad (6)$$

ここで,$\boldsymbol{M}$は質量マトリックス,$\boldsymbol{k}^e$は弾性剛性マトリックス,$\Delta\boldsymbol{f}_S$は表面力ベクトルによる節点荷重増分ベクトル,$\Delta\boldsymbol{f}_V$は体積力による節点荷重増分ベクトル,$\boldsymbol{r}$は残差荷重ベクトルであり,これらは,それぞれ以下のように書ける.

$$\boldsymbol{M} = \int_V \boldsymbol{N}^T \rho\, \boldsymbol{N}\,dV \quad (7)$$

$$\boldsymbol{k}^e = \int_V \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{D}^e\boldsymbol{B}dV \quad (8)$$

$$\Delta\boldsymbol{f}_S = \int_S \boldsymbol{N}^T\Delta\bar{\boldsymbol{T}}dS \quad (9)$$

$$\Delta\boldsymbol{f}_V = \int_S \boldsymbol{N}^T\Delta\bar{\boldsymbol{F}}dS \quad (10)$$

$$\boldsymbol{r} = \int_S \boldsymbol{N}^T\bar{\boldsymbol{T}}dS + \int_S \boldsymbol{N}^T\bar{\boldsymbol{F}}dS - \int_V \boldsymbol{B}^T\sigma dV \quad (11)$$

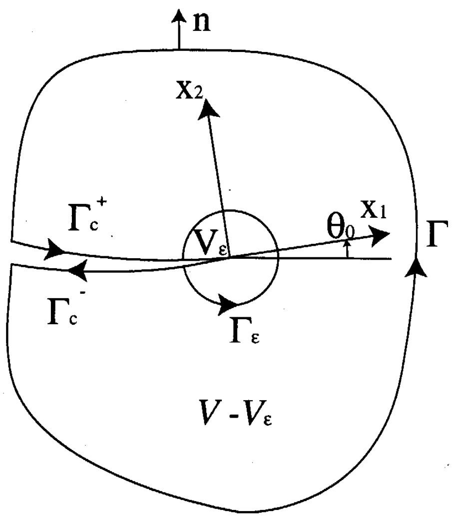


Fig.1 Coordinate systems and contour path of J-integral

ただし，ρ は密度，$\boldsymbol{D}^e$は弾性応力－ひずみマトリックスであり，$\boldsymbol{N}$ はMLSMから得られる形状関数マトリックス，$\boldsymbol{B}$ はひずみ－変位マトリックス，$\Delta\bar{\boldsymbol{T}}$ ，$\bar{\boldsymbol{T}}$ ，$\Delta\bar{\boldsymbol{F}}$ ，$\bar{\boldsymbol{F}}$ はそれぞれ，外荷重増分，外荷重，体積力増分，体積力ベクトルであり，σ は応力ベクトルである．

2.4 動的破壊力学パラメータ 衝撃荷重下のき裂や高速で曲折するき裂の破壊力学パラメータを評価するために，経路独立J積分がある．本論文においてEFGMの動的破壊力学問題への適用性は最終的に，Nishiokaらにより導かれた経路独立動的J積分(11)について評価を行う．したがって動的J積分について簡単に説明を行う．図1のような固体中に存在しているき裂を考える．図1に示す全体座標系を用いた場合，動的J積分は次式で表される．

$$
\begin{aligned}
J_k' &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K})n_k - t_i u_{i,k}\right]dS \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma+\Gamma_c}\left[(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K})n_k - t_i u_{i,k}\right]dS\right. \\
&\quad\left. + \int_{V_\Gamma - V_\varepsilon}\left[\rho\ddot{u}_i u_{i,k} - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,k}\right]dV\right\}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ここで$\boldsymbol{W}$はひずみエネルギ密度，$\boldsymbol{K}$は運動エネルギ密度，u_i, t_iは変位と表面力，ρは密度，n_kは経路上の単位法線ベクトルを表す．Γ_εはき裂近傍での経路，Γはき裂遠方での経路，Γ_cはき裂面上の経路である．また，経路$\Gamma+\Gamma_c$で囲まれた領域をV_Γ，$\Gamma_\varepsilon+\Gamma_c$で囲まれた領域を$V_\varepsilon$とする．

式(12)で表される動的J積分は，動的エネルギ解放率と等価であり(11)，遠方経路Γに対して経路独立であり(11)，近傍場経路Γ_εに対して形状不変性が実用的に成立する(12)とされている．したがって数値解析では，次の動的J積分表示を用いることができる(13)．

$$
\begin{aligned}
J_k' &= \int_{\Gamma+\Gamma_c}\left[(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{K})n_k - t_i u_{i,k}\right]dS \\
&\quad + \int_{V_\Gamma}\left[\rho\ddot{u}_i u_{i,k} - \rho\dot{u}_i\dot{u}_{i,k}\right]dV
\end{aligned}
\tag{13}
$$

動的破壊力学パラメータでJ_k'を求めるにあたっては，き裂先端を中心とする任意の円周経路上の境界積分とその内部の領域積分を用いた．積分方法については，ガウス積分を用いた．EFGMでは，MLSMを用いて任意の点で変位，応力等の値を容易に求めることができるので，ガウス積分点での必要な値をMLSMを用いて求めた．また，き裂が進展する場合には，EFGMの特長を生かし，その経路をき裂の進展とともに移動させた．

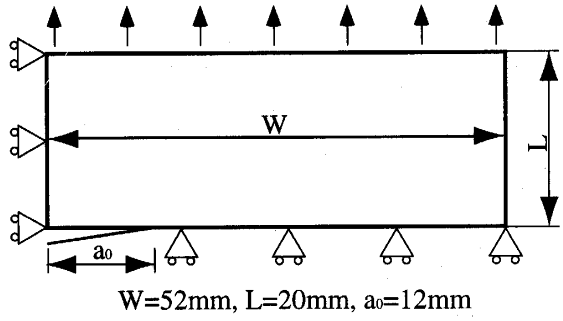


Fig. 2 Analyzed model for a plate with a center crack under dynamic loading

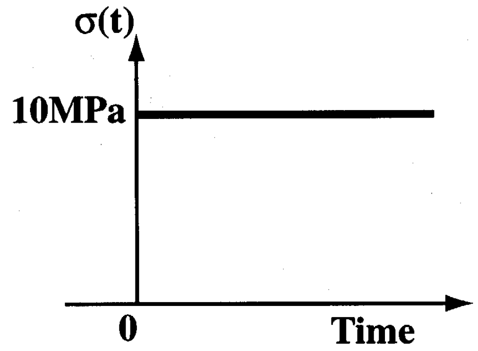


Fig. 3 History of dynamic loading.

Table 1 Number of nodes and nodal configuration of EFGM

model	number of nodes	number of background cells	crack
Model1	297	260	stationary
Model2	831	765	stationary
Model3	2449	2340	stationary
Model4	2820	2340	propagation

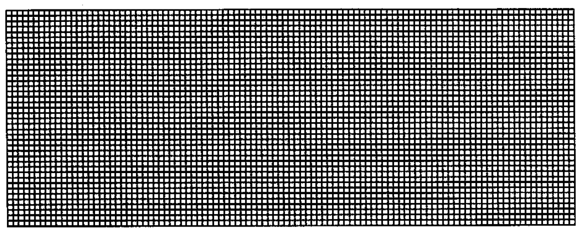
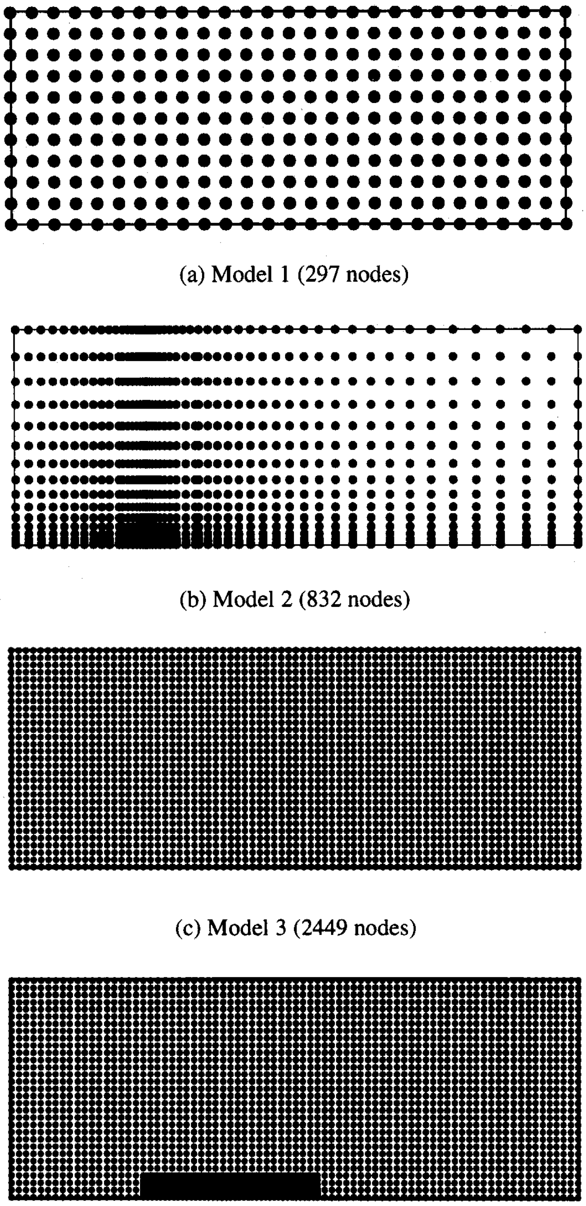


Fig. 4 Finite element mesh for stationary crack analysis

3. 解析結果および考察

3.1解析対象 解析対象にする中央き裂板とその解析条件を図2に示す．解析に用いた材料定数は下記の通りである．


(a) Model 1 (297 nodes)

(b) Model 2 (832 nodes)

(c) Model 3 (2449 nodes)

(d) Model 4 (2820 nodes)

Fig. 5 Node allocation for EFGM analysis

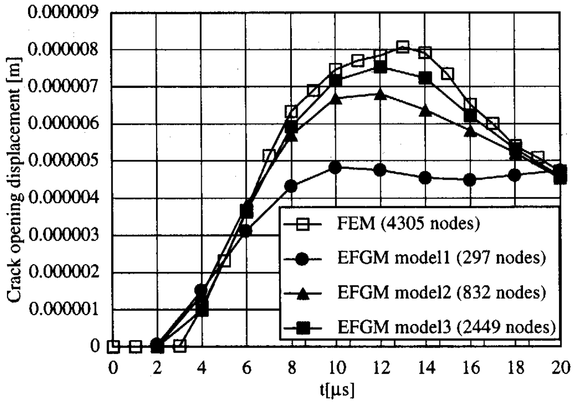


Fig. 6 Comparison of the crack opening displacement.

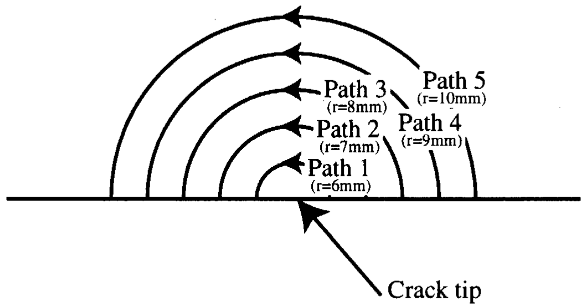


Fig. 7 Integral paths for J-integral.

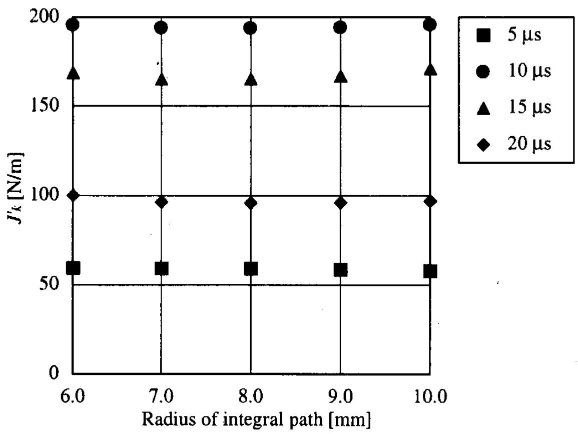


Fig. 8 Path independence of dynamic J-integral.

$E = 7562\,MPa,\ \nu = 0.394,\ \rho = 1191\,kg/m^3$

また，図3に示すような10MPaのHeaviside step funcionによる動的な荷重履歴を与えた．

3.2 停留き裂解析の結果 動的き裂問題における節点の配置の影響を検討するために，EFGMを3種類の節点配置により，き裂が進展しない場合のき裂開口変位の解析結果を，図4に示す十分に細かい4305節点の有限要素メッシュを用いたFEMの開口変位の解析結果と比較する．ここで，解析に用いた時間刻みは$\Delta t = 0.2\ \mu s$であり，用いた節点配置は，図5(a)～(c)に示した297節点(Model 1)，832節点(Model 2)，2449節点(Model 3)である．ここで，図5には動的き裂進展解析にのみに用いた2820節点(Model 4)もあわせて図5(d)に示してある．このときのバックグラウンドセルは，2820節点(Model 4)を除き，FEMの要素分割と同様に，節点がバックグラウンドセルの四角形形状を定義する10x10の積分点を持つバックグラウンドセルを用いた．EFGM解析における節点配置モデルは表1のようにまとめられる．

図6にき裂開口変位の時間変化を示す．ただし，ここでのき裂開口変位とはき裂中央部でのき裂と垂直方向の変位である．節点数が少ない場合にはFEMと比べると

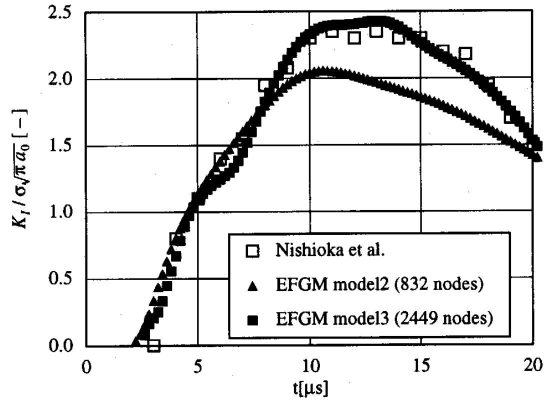


Fig. 9 Normalized stress intensity factor calculated by dynamic J-integral for the stationary crack.

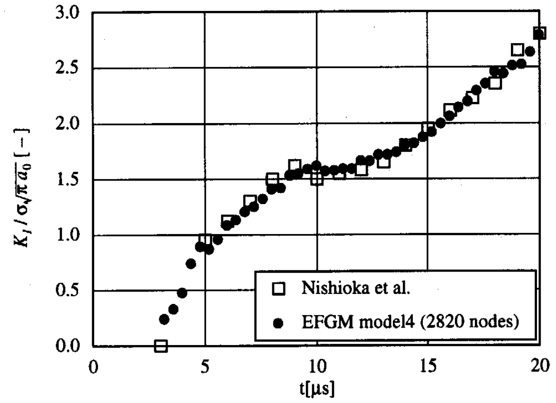


Fig. 10 Normalized stress intensity factor calculated by dynamic J-integral for the crack propagation.

開口変位が小さく出ていることがわかる．これより，節点が少なすぎると特異点であるき裂先端の状態を表すことができていないことがわかる．しかし，節点数をき裂先端部分で増やすことにより，き裂開口変位がFEMに近づいており，EFGMによる解析が正しく行われていることがわかる．また，FEMよりも少ない節点により同等の解析結果が得られていることがわかる．

次にEFGMによって2449節点(Model 3)の節点配置を用いて，図7に示す五つの経路により求めた動的破壊力学パラメータJ'_kの経路独立性を図8に示す．ただし，このとき経路積分については，円弧を20等分に分割し各4点のガウス積分を用い，領域積分については，円周と半径方向に20x20に均等に分割したそれぞれの領域について4x4点のガウス積分を行った．どの経路をとってもほぼ同じ値が得られており，動的破壊力学パラメータJ'_kの特徴である経路独立性が良く成立している．また，図9は，Model 2とModel3を用いてEFGMにより求めた動的破壊力学パラメータJ'_kから計算した無次元化応力拡大係数の時間変化を比較した図である．この図ではNishiokaら[(2)]が特異要素を用いたFEMによる解も同時に載せてある．これより，EFGMにより特異要素を用いたFEMと同程度の精度で解析を行えることがわかる．

3.3 進展き裂の解析結果　次に動的問題におけるき裂進展解析を行った．解析対象の形状は，Nishiokaら[(2)]が特異要素で行った解析と同様の図2に示すき裂板であり，前節と同様に図3に示すような10MPaのHeaviside step funcionによる動的な荷重履歴を与えた．き裂の進展については，き裂が荷重負荷開始後4.4 μs後より$v = 1000\,m/s$の一定速度で進展していくものとした[(2)]．また，この解析において時間刻みは，$\Delta t = 0.4$ μsとした．節点配置は図5(d)に示す2820節点(Model 4)の配置を用いて，EFGMによるき裂進展解析を行った．このときのバックグラウンドセル配置は，停留き裂解析とは異なり，EFGMの特徴を生かし，節点配置とは独立した2449節点(Model 3)で用いたバックグラウンドセル配置と同じ，均等な10x10の積分点を持つバックグラウンドセル配置を用いた．

動的破壊力学パラメータJ'_kを求める際には，停留き裂解析と同様に，経路積分については，円弧を20等分に分割し各4点のガウス積分を用い，領域積分については，円周と半径方向に20x20に均等に分割したそれぞれの領域について4x4点のガウス積分を行った．

EFGMにより求めた動的破壊力学パラメータJ'_kより求めた無次元化応力拡大係数の時間変化を図10に示す．この図にもNishiokaら[(2)]が行った移動特異要素による有限要素法で求めたJ'_kを同時に載せてある．Nishiokaら[(2)]の解析では，有限要素の節点数，要素数は明らかにされていないが，移動特異要素を用いているため，動的破壊力学パラメータJ'_kの精度は十分に出ていると考えられる．

EFGMの解析結果とNishiokaら[(2)]の解析結果を比較すると，EFGM解析はき裂進展が開始する前までは，停留き裂解析のJ'_kとほぼ一致するが，き裂進展後，$t = 5.0$ μs付近でEFGM解析では一旦J'_kの値が低下して，再度上昇し始める．Nishiokaら[(2)]の解析結果では，グラフ上では示すことができないが，これと同様の結果が得られている．$t = 10.0$ μs 付近のJ'_k値の停滞もEFGMの結果はよく合っている．そして，全体的にNishiokaら[(2)]の結果と良く一致しており，き裂進展問題でもEFGMが特異要素を用いた有限要素法とほぼ同程度の解析を行うことができ，解析手法として十分有効であることがわかる．

本論文におけるき裂進展解析においては，解析対象の物理形状と節点配置を一致させているおり，き裂進展と節点配置，すなわちき裂進展先に節点が配置されている

が, FEMと異なり, EFGMでは物理形状を別途定義することができる. これにより節点の無いところへき裂を進展させることも可能になる.

4. 結　言

本論文では, エレメントフリーガラーキン法を動弾性問題に適用するために, 慣性力を含む増分型のエレメントフリーガラーキン法の定式化を行い, き裂を持つ平板の動的破壊力学パラメータの解析にエレメントフリーガラーキン法を適用した. また, 生成系き裂進展解析に適用し, き裂進展時の動的破壊力学パラメータを任意の経路を用いて計算した. 以上より, 次のような結論を得た.

(1) 中央き裂を持つ平板についてエレメントフリーガラーキン法により数種類の節点配置を用いてき裂開口変位を求め, 有限要素法の結果と比較したところ, 有限要素法より少ない節点数でほぼ同程度の解析が行えることが分かった.

(2) 中央き裂を持つ平板の動的破壊力学パラメータの解析にエレメントフリーガラーキン法を適用し, 特異要素を用いた有限要素法の解析結果と比較したところ, ほぼ同程度の解析が行えることが分かった.

(3) エレメントフリーガラーキン法を用いて中央き裂を有する平板の生成系き裂進展シミュレーションを行い, き裂進展を伴う破壊解析において, 有限要素法のように要素などに縛られることなく, き裂を自由に進展させることができ, 移動型の積分経路を任意の経路で採用できることを示した. また, その精度も特異要素を用いた有限要素法と同程度であったことから, 破壊力学問題に対して有限要素法よりも有力な手法となりうることを示した.

参　考　文　献

(1) Nishioka,T. , Atluri, S. N., Numerical Modeling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies, by Moving Singular Elements Part 1: Formulation, Journal of Applied Mechanics, 47-3 (1980), 570-576.

(2) Nishioka,T. , Atluri, S. N., Numerical Modeling of Dynamic Crack Propagation in Finite Bodies, by Moving Singular Elements Part 2: Results, Journal of Applied Mechanics, 47-3 (1980), 577-582.

(3) 西岡俊久, 徳留宏幸, 木下政広, デローニー自動要素分割に基礎をおく移動有限要素法による混合系・破壊経路予測モードシミュレーション, 日本機械学会論文集, 65-631, A(1999), 183-190.

(4) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L. , Element-free Galerkin Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37 (1994), 229-256.

(5) 萩原世也, 津乗充良, 池田徹, 柴田朝史, 宮崎則幸, 中垣通彦, エレメントフリーガラーキン法の有向グラフによる節点検索法と非線形クリープ問題への適用, 日本機械学会論文集, 64-624, A(1998), 2073-2079.

(6) 津乗充良, 萩原世也, 池田徹, 木戸智洋, 宮崎則幸, エレメントフリーガラーキン法の弾塑性問題への適用, 日本計算工学会論文集, Vol.2, 論文番号20000001, (2000), 19-24.

(7) 津乗充良, 萩原世也, 池田徹, 木戸智洋, 宮崎則幸, エレメントフリーガラーキン法による生成系安定き裂進展シミュレーション, 日本計算工学会論文集, Vol. 2, 論文番号19990028, (2000), 13-18

(8) Fleming, M., Chu Y. A., Moran, B., Belytschko, T., Enriched element-free Galerkin Methos for Crack Tip Fields, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40 (1997), 1483-1504.

(9) Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T., A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46 (1999), 131-150.

(10) Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. , and Tabbara,M. Element-free Galerkin Methods for Static and Dynamic Fracture, International Journal of Solids and Structures, 32-17/18 (1995), 2547-2570.

(11) Nishioka,T. , Atluri, S. N., Path-Independent Integrals, Energy Release Rates, and General Solutions of Near-Tip Fields in Mixed-Mode Dynamic Fracture Mechanics, Engineering Fracture Mechanics, 18-1 (1983), 1-22.

(12) Nishioka,T. , The State of the Art in Computational Dynamic Fracture Mechanics, JSME International Journal, Series A, 37-4(1994), 313-333.

(13) Nishioka,T. , Atruli, S. N., A numerical Study of the Use of Path Independent Integrals in Elasto-Dynamic Crack Propagation, Engineering Fracture Mechanics, 18-1(1983), 23-33.

(14) Nishioka,T. , Atruli, S. N., A numerical Study of the Use of Path Independent Integrals in Elasto-Dynamic Crack Propagation, Engineering Fracture Mechanics, 18-1(1983), 23-33.