日本機械学会論文集(A 編)
72 巻 715 号(2006-3)

論文 No. 04-1301

# 熱応力下の異方性異種材界面き裂の応力拡大係数解析*

永井 政貴*1，山長 功*2
池田 徹*3，宮崎 則幸*3

# Stress Intensity Factor Analysis of an Interface Crack between Anisortropic Dissimilar Materials under Thermal Stress

Masaki NAGAI, Koh YAMANAGA,
Toru IKEDA*4 and Noriyuki MIYAZAKI

*4 Department of Mechanical Engineering and Science, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8501 Japan

One of the most frequently encountered problems in bimaterial media is interfacial cracking, sometimes also known as delamination. The stress intensity factors of a crack between dissimilar materials are important parameters for evaluating delamination strength. A new method is proposed for the stress intensity factor analysis of a crack between dissimilar anisotropic materials under thermal stress. The virtual crack extension method (VCEM), which is used with the finite element method (FEM), is reliable methods for estimating the energy release rate. Energy release rate obtained by the VCEM is separated into individual stress intensity factors, $K_{\mathrm{I}}$, $K_{\mathrm{II}}$ and $K_{\mathrm{III}}$ using the principle of superposition. The present method was applied to interface cracks between jointed dissimilar plates under thermal stress. The distribution of stress and the crack opening displacement obtained by the asymptotic solution with the stress intensity factors are compared with those of obtained by the FEM with a fine mesh. They are almost identical each other.

***Key Words*** : Finite Element Method, Stress Intensity Factor, Fracture Mechanics, Anisotropic, Virtual Crack Extension Method, Interface, Mixed Mode, Thermal Stress

## 1. 緒　言

接着構造物の各方面での普及や，電子デバイスや MEMS などの微細構造物で，多種多様な材料が積層されて使用されるようになったことから，異種材料間のはく離や破壊が信頼性上の大きな問題になっている．これらの異種材料間の強度信頼性評価に，界面破壊力学が応用され始めているが，複合材料や単結晶のような異方性を有する材料が使用される場合を考慮した，異方性界面破壊力学の確立が急務になっている．

異種材界面き裂の応力拡大係数は，異種材界面き裂の定量的評価をする上でエネルギー解放率や J 積分と並んで重要な破壊力学パラメータである．異方性異種材界面き裂問題については Gotoh(1)，Clements(2)，Willis(3)，Bassani and Qu(4)，Wu(5)らなどにより研究され，き裂面の開口変位等が明らかにされた．Hwu(6)は，Stroh Formalism(7)を用いて，異方性異種材界面き裂先端近傍の変位と応力の漸近解を明らかにし，異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を定義した．Qian and Sun(8)は，材料の対称面の一つが，図 1 に示すき裂周りの座標系における $x_1$-$x_2$ 軸と平行な直交異方性材料間の異種材界面き裂の応力拡大係数を求める数値解析手法を提案しているが，任意の異方性材料により構成される異種材界面き裂の応力拡大係数を求めることができる数値解析手法は，存在しなかった．

著者らは既報(9)において，Hwu(6)により求められた異方性異種材界面き裂先端近傍の漸近解を利用して，仮想き裂進展法に重ね合わせの方法を適用した Matos(10)らの方法を適用することで，任意の異方性異種材界面き裂の応力拡大係数解析を行う手法を開発した．

本研究では，この方法を異種材接合界面で特に大きな問題となる熱弾性問題に拡張した．

## 2．異方性異種材界面き裂の応力拡大係数

図 1 に示すような異方性異種材界面き裂の一般解は，Stroh Formalism(7,11)を用いると，次式のように示される(6)．

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j &= \mathbf{A}_j\mathbf{f}_j(z)+\overline{\mathbf{A}_j\mathbf{f}_j(z)}\\ \boldsymbol{\varphi}_j &= \mathbf{B}_j\mathbf{f}_j(z)+\overline{\mathbf{B}_j\mathbf{f}_j(z)}\end{aligned} \quad \text{, in Material } j \qquad (1)$$

ここで，$\mathbf{u}_j$，$\boldsymbol{\varphi}_j$ はそれぞれ材料 $j$ の変位 $(u_\alpha;\alpha=1,\ 2,\ 3)$

---

* 原稿受付　2004 年 12 月 10 日．
*1 准員，京都大学大学院工学研究科(〒606-8501 京都市左京区吉田本町)．
*2 九州大学大学院工学研究府(〒819-0395 福岡市西区元岡 744)．
*3 正員，京都大学大学院工学研究科．
E-mail : ikeda@mech.kyoto-u.ac.jp

および応力関数 ($\varphi_{\alpha,1}=\sigma_{\alpha 2}$, $\varphi_{\alpha,2}=-\sigma_{\alpha 1}$; $\alpha=1, 2, 3$) である．$\mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}_j$ は，Stroh の固有ベクトルによりなるマトリックスを，$\overline{(\ )}$ は，共役を示す．式(1)において $\mathbf{f}_1(z)$, $\mathbf{f}_2(z)$ は，次のような関数である．

$$\mathbf{f}_1(z)=\mathbf{B}_1^{-1}\boldsymbol{\Psi}(z)$$
$$\mathbf{f}_2(z)=\mathbf{B}_2^{-1}\overline{\mathbf{M}}^{*-1}\mathbf{M}^{*}\boldsymbol{\Psi}(z) \tag{2}$$

$\mathbf{M}^*$ は，次のような２つの材料の Barnett-Lothe テンソル $\mathbf{S}_j, \mathbf{L}_j$ より得られる．

$$\mathbf{M}^*=\mathbf{D}-i\mathbf{W} \tag{3}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{L}_1^{-1}+\mathbf{L}_2^{-1},\quad \mathbf{W}=\mathbf{S}_1\mathbf{L}_1^{-1}-\mathbf{S}_2\mathbf{L}_2^{-1} \tag{4}$$

また，Barnett-Lothe テンソル $\mathbf{S}_j$ , $\mathbf{L}_j$ は，材料 $j$ の 3×3 の実数マトリックスであり，次式のように示される[12]．

$$\mathbf{S}_j=i\left(\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j^T-\overline{\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j^T}\right),\quad \mathbf{L}_j=-2i\mathbf{B}_j\mathbf{B}_j^T \tag{5}$$

Hwu は，従来の均質体中のき裂と互換性のある異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を，次のように定義した[6]．

$$\mathbf{K}=\begin{Bmatrix}K_{\mathrm{II}}\\ K_{\mathrm{I}}\\ K_{\mathrm{III}}\end{Bmatrix}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\,\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle (r/l_k)^{-i\varepsilon_\alpha}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\begin{Bmatrix}\sigma_{12}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{23}\end{Bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\left[\boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{\lambda}_2,\ \boldsymbol{\lambda}_3\right] \tag{7}$$

ここで，$r$ はき裂先端からの距離，$l_k$ は任意の代表長さであり，≪ ≫は，α= 1, 2, 3 なる対角成分をもつ対角マトリックスであることを示す．また，$\lambda_\alpha$は，次式の固有関係を満たす固有ベクトルである．

$$\left(\mathbf{M}^*+e^{2i\pi\delta}\overline{\mathbf{M}}^*\right)\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0} \tag{8}$$

この式の固有値 $\delta_\alpha$ は，Ting により次のように求められている[13]．

$$\delta_\alpha=-\frac{1}{2}+i\varepsilon_\alpha,\quad \alpha=1,2,3 \tag{9}$$

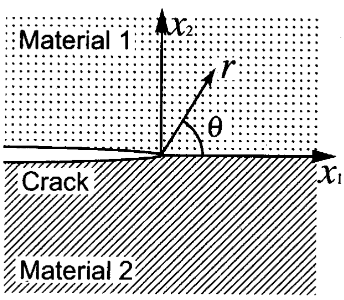


Fig. 1 An interface crack between dissimilar anisotropic media

$$\varepsilon_1=\varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta},\quad \varepsilon_2=-\varepsilon,\quad \varepsilon_3=0,$$
$$\beta=\left[-\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1}\right)^2\right]^{1/2} \tag{10}$$

均質体中のき裂の場合，モード II，I，III の応力場は互いに独立しているが，異方性異種材界面き裂の場合，一般的にこれらは連成しており，独立したモードは存在しない．ただし，二つの材料の対称面の一つが，それぞれ $x_1$–$x_2$ 面と平行な場合は，モード III が独立成分となり，モード II と I のみが連成する．

また，異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を混合モードの破壊靭性値として利用するためには，応力拡大係数が一意的にき裂先端の応力場を規定する必要がある．このためには，$l_k$ が同じ値のときの応力拡大係数を用いるべきである．本研究では，これまでの等方性異種材界面き裂の研究[14]を参考にして，便宜的に $l_k=10\mu\mathrm{m}$ として計算している．また $l_k$ を $l'_k$ に変化させた場合の応力拡大係数の変換式は次式で示される．

$$\mathbf{K}'=\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle\left(\frac{l'_k}{l_k}\right)^{i\varepsilon_\alpha}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{11}$$

一方，エネルギー解放率 $G$ と応力拡大係数 $\mathbf{K}$ の間には，次のような関係がある[6]．

$$G=\frac{1}{4}\mathbf{K}^T\mathbf{E}\mathbf{K},\quad \mathbf{E}=\mathbf{D}+\mathbf{W}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W} \tag{12}$$

式(2)における $\boldsymbol{\Psi}(z)$ は，き裂先端近傍では，次式のように示される[6]．

$$\boldsymbol{\Psi}(z)=\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle\frac{2z^{1/2+i\varepsilon_\alpha}}{1+2i\varepsilon_\alpha}\right\rangle\right\rangle\mathbf{p}_0 \tag{13}$$

$$\mathbf{p}_0=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left\langle\left\langle\frac{e^{\pi\varepsilon_\alpha}}{l_k^{i\varepsilon_\alpha}\cosh(\pi\varepsilon_\alpha)}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{14}$$

このとき，図１の $x_1$ 軸上での応力場と開口変位は，次のようになる[6]．

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{12}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{32}\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle (r/l_k)^{i\varepsilon_\alpha}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{15}$$

$$\begin{Bmatrix}\Delta u_1\\ \Delta u_2\\ \Delta u_3\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\overline{\boldsymbol{\Lambda}}^{-T}\left\langle\left\langle\frac{(r/l_k)^{i\varepsilon_\alpha}}{(1+2i\varepsilon_\alpha)\cosh(\pi\varepsilon_\alpha)}\right\rangle\right\rangle\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{16}$$

## ３．解析方法

### ３.１　異方性弾性解析のための二次元有限要素法

Stroh Formalism で用いられる二次元近似は$\varepsilon_{33}$ のみを０

とした平面ひずみ近似で，応力–ひずみ関係は次式のようになる．

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ & C_{22} & C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ & & C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ & sym. & & C_{55} & C_{56}\\ & & & & C_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon^e_{11}\\ \varepsilon^e_{22}\\ 2\varepsilon^e_{23}\\ 2\varepsilon^e_{31}\\ 2\varepsilon^e_{12}\end{Bmatrix}-\alpha_{33}T\begin{Bmatrix}C_{31}\\ C_{32}\\ C_{34}\\ C_{35}\\ C_{36}\end{Bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon^e_{11}\\ \varepsilon^e_{22}\\ 2\varepsilon^e_{23}\\ 2\varepsilon^e_{31}\\ 2\varepsilon^e_{12}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{31}\\ 2\varepsilon_{12}\end{Bmatrix}-T\begin{Bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\\ 2\alpha_{23}\\ 2\alpha_{31}\\ 2\alpha_{12}\end{Bmatrix} \tag{18}$$

ここで，$\alpha_{ij}$ は線膨張係数，$T$ は温度を示す．また，$\sigma_{33}$ は次式で示される．

$$\sigma_{33}=\left[C_{13}\ \ C_{23}\ \ C_{43}\ \ C_{53}\ \ C_{63}\right]\begin{Bmatrix}\varepsilon^e_{11}\\ \varepsilon^e_{22}\\ 2\varepsilon^e_{23}\\ 2\varepsilon^e_{31}\\ 2\varepsilon^e_{12}\end{Bmatrix}-C_{33}\alpha_{33}T \tag{19}$$

このとき，ひずみ–変位関係は，変位が $x$, $y$ のみに依存することから，次のように表される．

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}=\dfrac{\partial u}{\partial x} & 2\varepsilon_{23}=\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial w}{\partial y}\\ \varepsilon_{22}=\dfrac{\partial v}{\partial y} & 2\varepsilon_{31}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \varepsilon_{33}=0 & 2\varepsilon_{12}=\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases} \tag{20}$$

したがって，通常の平面ひずみ近似と異なり，各節点の自由度は3となる．本研究では，式(17)～(20)に基づいた二次元異方性線形熱弾性有限要素法を用いて解析を行った．

**3.2 仮想き裂進展法** Parks により拡張された仮想き裂進展法より，熱弾性問題におけるエネルギー解放率$G$は次式で与えられる[15,16]．

$$G=-\frac{1}{\Delta a}\sum_l\int_{V_0}\left[\boldsymbol{\sigma}^T(\Delta\mathbf{B}_u)\mathbf{U}_l|\mathbf{J}|+\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T\boldsymbol{\varepsilon}_e(\Delta|\mathbf{J}|)\right.$$
$$\left.-\mathbf{A}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}_t\mathbf{T}_l\boldsymbol{\Psi}(\Delta\mathbf{X}_l)|\mathbf{J}|\right]d\mathrm{V}_0 \tag{21}$$

ここで，$\mathbf{V}_0$, $|\mathbf{J}|$, $\mathbf{X}_l$ は，それぞれ局所座標，ヤコビアンおよび節点座標ベクトルを示す．また，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\varepsilon}^e$，$\mathbf{A}$ は，それぞれ次式で定義される，応力，弾性ひずみおよび線膨張係数マトリックスを示す．

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}^e=\begin{Bmatrix}\varepsilon^e_{11}\\ \varepsilon^e_{22}\\ 2\varepsilon^e_{23}\\ 2\varepsilon^e_{31}\\ 2\varepsilon^e_{12}\end{Bmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{Bmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{22}\\ 2\alpha_{23}\\ 2\alpha_{31}\\ 2\alpha_{12}\end{Bmatrix} \tag{22}$$

全ひずみベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}$は，変位-ひずみマトリックス$\mathbf{B}_u$と要素の節点変位ベクトル$\mathbf{U}_l$より次式で表せる．

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}_u\mathbf{U}_l \tag{23}$$

明らかに，弾性ひずみベクトルは次式より得られる．

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e=\boldsymbol{\varepsilon}-T\mathbf{A} \tag{24}$$

ここで，温度$T$は，節点温度ベクトル$\mathbf{T}_l$と内挿関数$\boldsymbol{\Phi}_t$で次のように近似される．

$$T=\boldsymbol{\Phi}_t\mathbf{T}_l \tag{25}$$

また，$\mathbf{B}_t$は，次式で示される．

$$\mathbf{B}_t=\partial\boldsymbol{\Phi}_t/\partial x \tag{26}$$

なお，式(21)における仮想き裂進展量$\Delta a$には，差分近似が成り立つように十分に小さく，かつ，数値差分の計算時に桁落ちを起こさない大きさをとる必要がある．過去の経験より[17]，倍精度計算で$\Delta a$の大きさを式(21)を適用するき裂先端周辺の有限要素長（正方形とした場合）の $10^{-5}$～$10^{-8}$ 倍程度にとると安定した値が得られることが判っている．

**3.3 応力拡大係数のモード分離** 2章で述べたとおり，異方性異種材界面き裂の場合，荷重条件が単一モードであっても，応力拡大係数は混合モード状態となり，モード分離が必要となる．Matos[10]らは，Yau and Wang[18]の M 積分法の考え方を取り入れ，仮想き裂進展法によって等方性異種材界面き裂の応力拡大係数解析を行う手法を提案している．本研究では，このMatosらの方法を用いることで，解析を行った．

まず，解析対象に，あらかじめ変位・応力・応力拡大係数が既知な解を重ね合わせることを考える．解析対象を状態(1)，重ね合わせる既知の解を状態(2)，両者を重ね合わせた状態を(1+2)とすると，状態(1+2)の任意の点の変位，応力，応力拡大係数に次のような重ね合わせの法則が成り立つ．

$$\begin{cases}\mathbf{u}^{(1+2)}=\mathbf{u}^{(1)}+\mathbf{u}^{(2)}\\ \boldsymbol{\sigma}^{(1+2)}=\boldsymbol{\sigma}^{(1)}+\boldsymbol{\sigma}^{(2)}\\ \mathbf{K}^{(1+2)}=\mathbf{K}^{(1)}+\mathbf{K}^{(2)}\end{cases} \tag{27}$$

ここで，$\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{K}$ は，それぞれ変位，応力，応力拡大係

数である．したがって，式(12)より状態(1+2)のエネルギー解放率は次のようになる．

$$G^{(1+2)} = \frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}\right\}^T \mathbf{E}\left\{\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}\right\} = G^{(1)} + G^{(2)} + \frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(1)}\right\} \quad (28)$$

これを変形すると次式が得られる．

$$\frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(1)}\right\} = G^{(1+2)} - G^{(1)} - G^{(2)} \quad (29)$$

式(29)において，左辺の $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}^{(2)}$および右辺の $G^{(2)}$は既知である．また，$G^{(1)}, G^{(1+2)}$,は，$\mathbf{u}^{(1)}$および$\mathbf{u}^{(1+2)}$より式(21)の仮想き裂進展法を用いて求めることができる．したがって，３つの独立した既知の解を解析対象に重ね合わせることによって，式(29)より $\mathbf{K}^{(1)}$を求めることができる．例えば，重ね合わせる既知の解として，異方性異種材界面き裂の漸近解の式(1)～(14)を用いる場合を考える．この漸近解について，既知の解$(a)$ [ $K_{\mathrm{II}}=1$, $K_{\mathrm{I}}=0$, $K_{\mathrm{III}}=0$ ], $(b)$ [ $K_{\mathrm{II}}=0$, $K_{\mathrm{I}}=1$, $K_{\mathrm{III}}=0$ ], $(c)$ [ $K_{\mathrm{II}}=0$, $K_{\mathrm{I}}=0$, $K_{\mathrm{III}}=1$ ]の場合を重ね合わせると，式(29)より，次式の連立１次方程式を求めることができる．

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}}^{(1)} \\ K_{\mathrm{I}}^{(1)} \\ K_{\mathrm{III}}^{(1)} \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} G_{(a)}^{(1+2)} - G^{(1)} - G_{(a)}^{(2)} \\ G_{(b)}^{(1+2)} - G^{(1)} - G_{(b)}^{(2)} \\ G_{(c)}^{(1+2)} - G^{(1)} - G_{(c)}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

これを解くことで，解析対象の応力拡大係数 $K_{\mathrm{II}}^{(1)}$, $K_{\mathrm{I}}^{(1)}$, $K_{\mathrm{III}}^{(1)}$ が得られる．

## ４．解析結果

３章で述べた解析手法の精度を検討するため，図２に示すような，両側き裂を持つ接合板について，全体を 20˚C 等温温度冷却させた場合(sample 1)と，左右に 0.1˚C/mm の一様温度勾配をもたせた場合(sample 2)のき裂の応力拡大係数を解析した．有限要素法解析は，８節点アイソパラメトリック要素を用いて行った．材料の組合せとして表１に示す材料定数[8, 19, 20]を使い，表２の組合せについて解析を行った．Aragonite は直交異方性材料，LT は三方晶材料，GSO は単斜晶材料である．解の収束性を確認するため，表３に示すような４種類の要素分割を使用した．

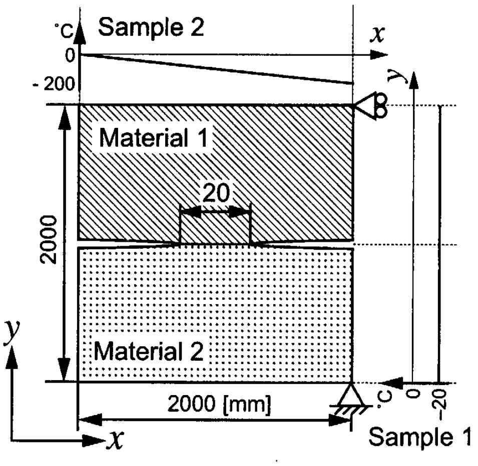


Fig. 2 Jointed dissimilar plates with double edge cracks under thermal stress ( Sample 1: Uniform change of temperature, −20℃, Sample 2: Uniform gradient of temperature, −0.1℃/mm)

まず，各要素分割により求めたエネルギー解放率と応力拡大係数を表４～７に示す．これより，どのケースについても要素分割が細かくなるにつれて，主要なモードの応力拡大係数は，値が収束していっているのがわかる．しかし，マイナーなモードの値については，収束に達しておらず，このような小さな値をもつモードにおいて，値が収束するような高精度な解析を行うには，さらに細かな要素分割を用いた有限要素法解析を行う必要がある．だが現実的には，このような小さな値しか持たないモードは破壊にほとんど寄与しないと考えられるので，$m/a$ = 0.005 程度の要素分割の解析でも十分な精度を有していると判断した．

次に，Mesh 4 を用いて本手法により得られた応力拡大係数を，式(1)～(16)のき裂先端近傍の応力と開口変位(Crack Opening Displacement: COD)の漸近解に代入し，その分布を求めた．これを Mesh 4 を用いて有限要素法により直接得られた応力値・開口変位の分布と比較

Table 1 Elastic stiffnesses (GPa) and CTE (x 10$^{-6}$ /℃)

| | | Aragonite (Orthotropic) | GSO (Monoclinic) | LT (Trigonal) |
|---|---|---|---|---|
| Elastic Stiffness | $C_{11}$ | 159 | 223 | 230 |
| | $C_{12}$ | 36.6 | 108 | 42 |
| | $C_{13}$ | 2 | 98.5 | 79 |
| | $C_{14}$ | 0 | 0 | −11 |
| | $C_{15}$ | 0 | 8.4 | 0 |
| | $C_{22}$ | 87 | 150 | $=C_{11}$ |
| | $C_{23}$ | 15.9 | 102 | $=C_{13}$ |
| | $C_{24}$ | 0 | 0 | $=-C_{11}$ |
| | $C_{25}$ | 0 | 33.3 | 0 |
| | $C_{33}$ | 85 | 251 | 275 |
| | $C_{35}$ | 0 | −6 | 0 |
| | $C_{44}$ | 41.3 | 78.8 | 96 |
| | $C_{46}$ | 0 | 6.6 | 0 |
| | $C_{55}$ | 25.6 | 68.6 | $=C_{44}$ |
| | $C_{56}$ | 0 | 0 | $=C_{14}$ |
| | $C_{66}$ | 42.7 | 82.7 | $=(C_{11}-C_{12})/2$ |
| CTE | $\alpha_{11}$ | 35.0 | 4.4 | 16.1 |
| | $\alpha_{22}$ | 17.0 | 14.0 | 16.1 |
| | $\alpha_{33}$ | 10.0 | 6.8 | 4.1 |
| | $\alpha_{31}$ | 0 | −1.4 | 0 |

Table 2 Combinations of materials for thermal elastic analyses

| Combinations | Material 1 | Material 2 |
|---|---|---|
| Case 1 | Aragonite | GSO |
| Case 2 | LT | GSO |

したものを，図 3～10 に示す．図 3～6 においては，図1における θ=0, すなわち界面上の応力値と, θ=π/4（材料１側）とθ=−π/4（材料２側）の半径方向線上の応力値について示した．また，図 7～10 には，き裂開口変位の $x$, $y$, $z$ 方向成分（$\Delta u$, $\Delta v$, $\Delta w$）を示した．図3～10 より，各負荷条件における主要なモードの結果については良く一致しており，本手法により得られた応力拡大係数の値が妥当であることを示している．しかし，応力拡大係数の値が０に近い，Case 2 の $K_{\mathrm{II}}$ に対応する応力の結果については，ほとんど一致していない．上述したように，このような非常に小さい値をも

Table 3 Finite Element meshes for analyses

| | Number of nodes | Number of elements | *m/a* |
|---|---|---|---|
| Mesh 1 | 5617 | 1816 | 0.2 |
| Mesh 2 | 9745 | 3184 | 0.1 |
| Mesh 3 | 22333 | 7369 | 0.05 |
| Mesh 4 | 33393 | 11028 | 0.005 |

*m*: size of the smallest element around a crack tip.

Table 4 Calculated stress intensity factors (Sample 1 - Case 1)

| Mesh | *m/a* | $G$ | $K_{\mathrm{II}}$ | $K_{\mathrm{I}}$ | $K_{\mathrm{III}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | kJ/m$^2$ | MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, $l_k$=10μm | | |
| Mesh 1 | 0.2 | 0.107 | 3.84 | 0.51 | 0.34 |
| Mesh 2 | 0.1 | 0.104 | 3.82 | 0.53 | 0.34 |
| Mesh 3 | 0.05 | 0.103 | 3.80 | 0.54 | 0.35 |
| Mesh 4 | 0.005 | 0.101 | 3.78 | 0.57 | 0.35 |

Table 5 Calculated stress intensity factors (Sample 1 - Case 2)

| Mesh | *m/a* | $G$ | $K_{\mathrm{II}}$ | $K_{\mathrm{I}}$ | $K_{\mathrm{III}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | kJ/m$^2$ | MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, $l_k$=10μm | | |
| Mesh 1 | 0.2 | 0.0256 | 2.11 | 0.00 | 0.63 |
| Mesh 2 | 0.1 | 0.0251 | 2.10 | 0.04 | 0.63 |
| Mesh 3 | 0.05 | 0.0249 | 2.09 | 0.06 | 0.63 |
| Mesh 4 | 0.005 | 0.0247 | 2.09 | 0.11 | 0.63 |

Table 6 Calculated stress intensity factors (Sample 2 - Case 1)

| Mesh | *m/a* | $G$ | $K_{\mathrm{II}}$ | $K_{\mathrm{I}}$ | $K_{\mathrm{III}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | kJ/m$^2$ | MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, $l_k$=10μm | | |
| Mesh 1 | 0.2 | 2.64 | 19.1 | 2.51 | 1.70 |
| Mesh 2 | 0.1 | 2.58 | 19.0 | 2.66 | 1.71 |
| Mesh 3 | 0.05 | 2.54 | 18.9 | 2.73 | 1.72 |
| Mesh 4 | 0.005 | 2.51 | 18.8 | 2.82 | 1.74 |

Table 7 Calculated stress intensity factors (Sample 2 - Case 2)

| Mesh | *m/a* | $G$ | $K_{\mathrm{II}}$ | $K_{\mathrm{I}}$ | $K_{\mathrm{III}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | kJ/m$^2$ | MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, $l_k$=10μm | | |
| Mesh 1 | 0.2 | 0.633 | 10.5 | 0.04 | 3.12 |
| Mesh 2 | 0.1 | 0.622 | 10.4 | 0.21 | 3.13 |
| Mesh 3 | 0.05 | 0.616 | 10.4 | 0.33 | 3.14 |
| Mesh 4 | 0.005 | 0.611 | 10.4 | 0.52 | 3.16 |

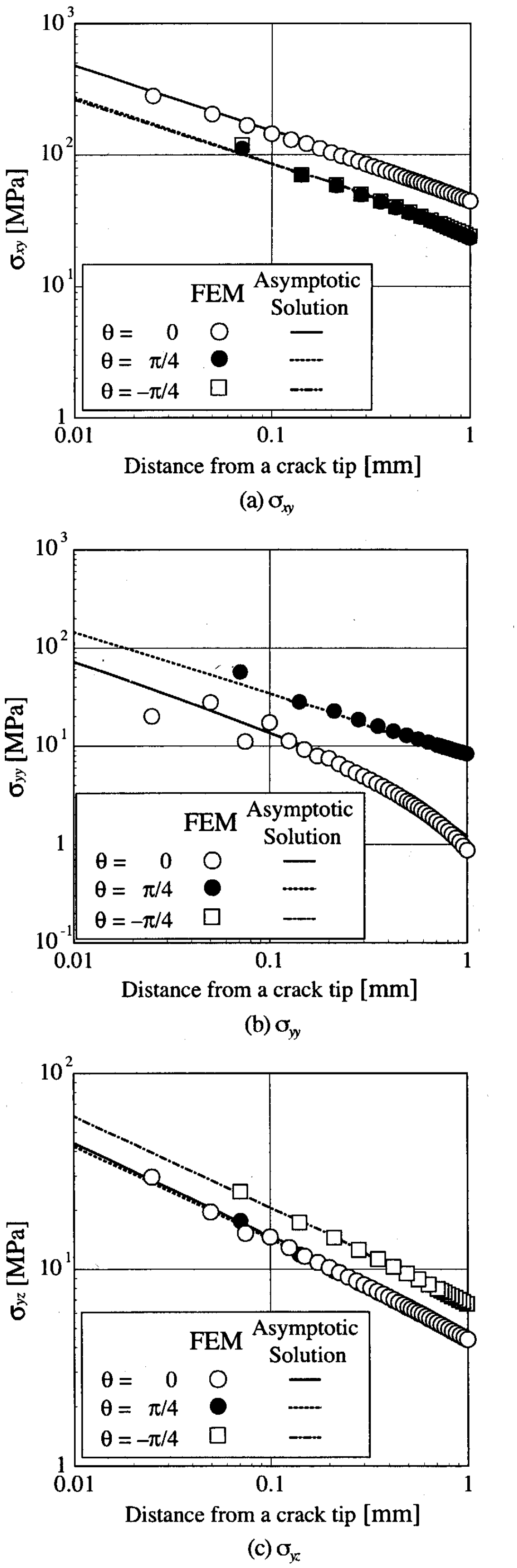


Fig. 3 Distributions of stress in the vicinity of an interface crack tip obtained by the asymptotic solution with analyzed stress intensity factors and obtained by the FEM with mesh 4 directly ( Sample 1, Case 1 ).

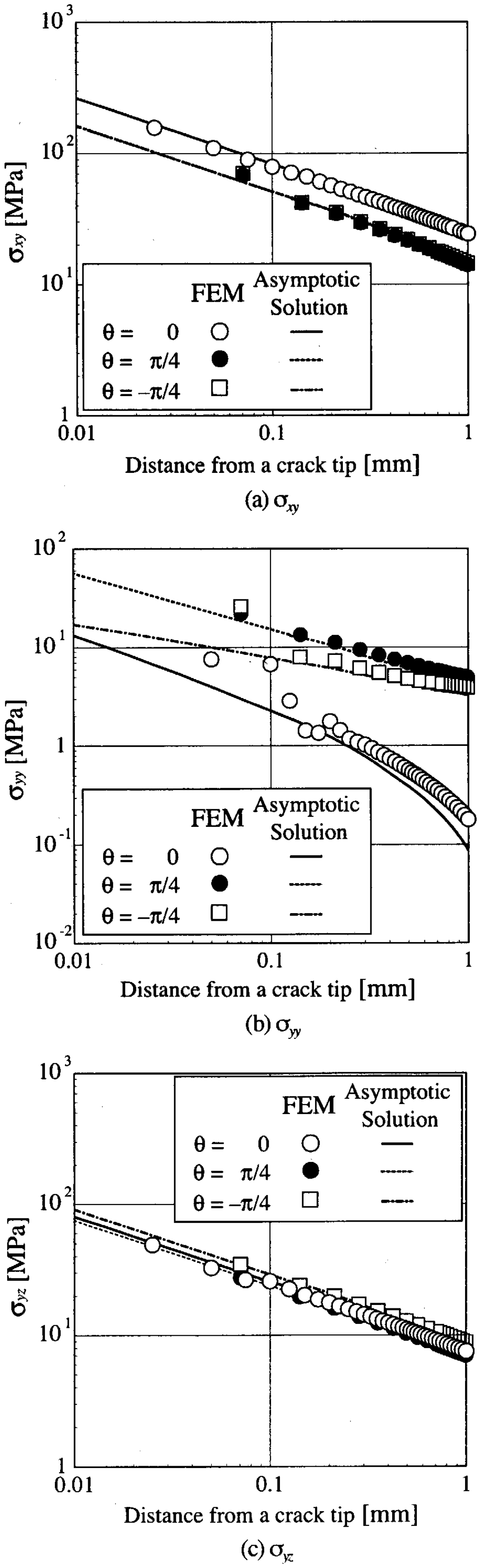


Fig. 4 Distributions of stress in the vicinity of an interface crack tip obtained by the asymptotic solution with analyzed stress intensity factors and obtained by the FEM with mesh 4 directly ( Sample 1, Case 2 ).

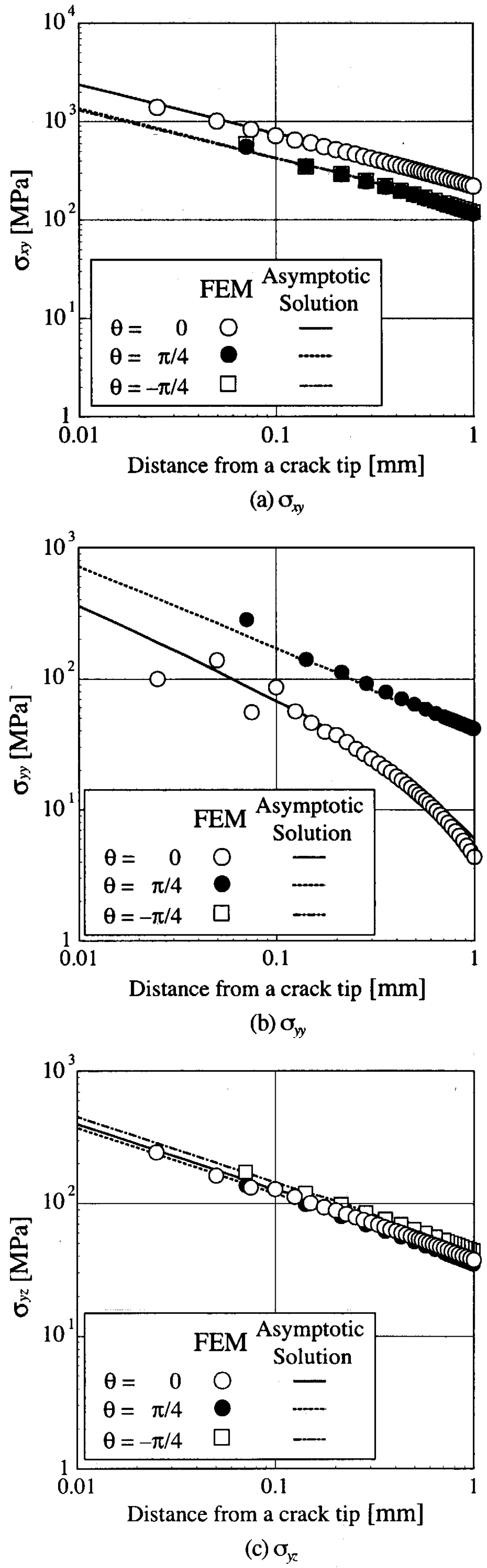


Fig. 5 Distributions of stress in the vicinity of an interface crack tip obtained by the asymptotic solution with analyzed stress intensity factors and obtained by the FEM with mesh 4 directly ( Sample 2, Case 1 ).

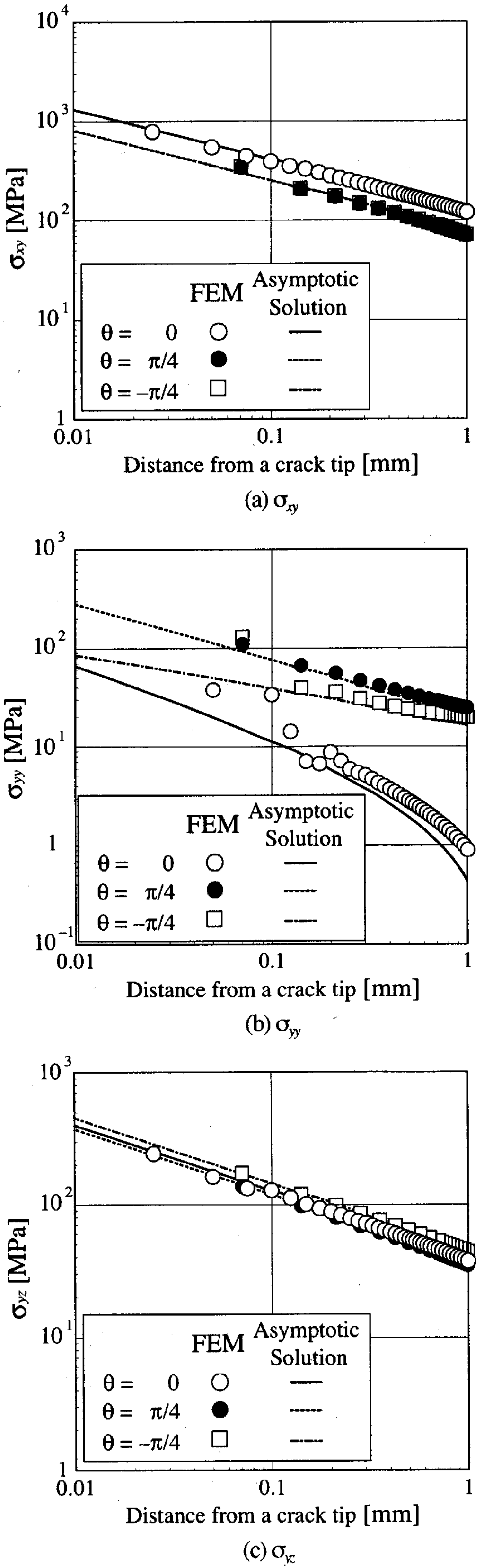


Fig. 6 Distributions of stress in the vicinity of an interface crack tip obtained by the asymptotic solution with analyzed stress intensity factors and obtained by the FEM with mesh 4 directly ( Sample 2, Case 2 ).

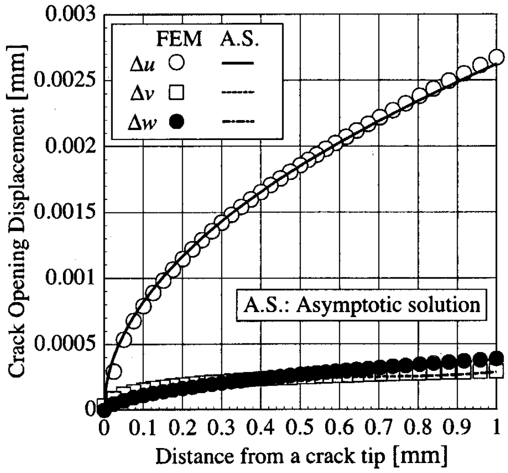


Fig. 7 COD obtained by the asymptotic solution with analyzed stress intensity factors and obtained by the FEM with mesh 4 directly ( Sample 1, Case 1).

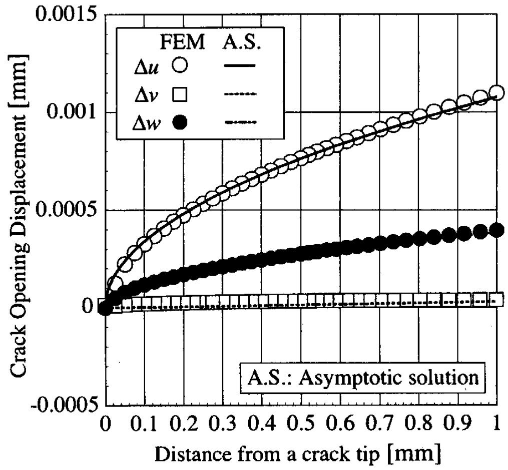


Fig. 8 COD obtained by the asymptotic solution with analyzed stress intensity factors and obtained by the FEM with mesh 4 directly ( Sample 1, Case 2).

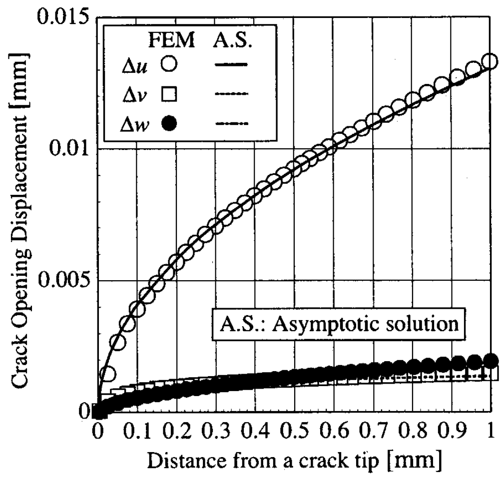


Fig. 9 COD obtained by the asymptotic solution with analyzed stress intensity factors and obtained by the FEM with mesh 4 directly ( Sample 2, Case 1).

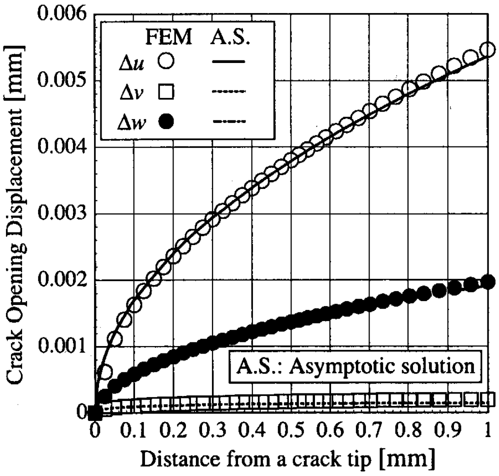


Fig. 10 COD obtained by the asymptotic solution with analyzed stress intensity factors and obtained by the FEM with mesh 4 directly ( Sample 2, Case 2).

つモードについては，さらに細かな要素分割を用いなければ，有限要素法結果と漸近解が一致しないものと考えられる．

## 5．結　言

異方性異種材界面き裂の漸近解を利用して，熱弾性問題に拡張した仮想き裂進展法に重ね合わせの方法を適用することで，熱応力下の異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を解析する手法を開発した．この手法を，接合界面に両側き裂を持つ半無限接合板に等温温度変化と一様温度勾配を与えた問題に適用し，その解析精度を検証した．その結果，本手法を用いることで，熱応力を受ける任意の異方性材料により構成される異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を精度良く求められることを確認した．

## 謝　辞

本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金の援助により行われた．記して感謝する．

## 文　献


(1) Gotoh, M., Some Problems of bonded anisotropic plates with cracks along the bond, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 3 (1967), pp. 253-265.

(2) Clements, D. L., A crack between dissimilar anisotropic media, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 9 (1971), pp. 257-265.

(3) Wills, J. R., Fracture Mechanics of Interfacial Cracks, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 19 (1971), pp. 353-368.

(4) Bassani, J. L. and Qu, J., On Elasticity Solutions for Crack Bimaterial and Bicrystal Interfaces, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 37 (1989), pp. 435-453.

(5) Wu, K. C., Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials, *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57 (1990), pp. 882-886.

(6) Hwu, C., Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52 (1991), pp. 239-256.

(7) Stroh, A. N., Dislocation and cracks in anisotropic elasticity, *Philosophical Magazine*, Vol. 7 (1952), pp. 625-646.

(8) W. Qian and C. T. Sun, Methods for stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35 (1997), pp. 3317-3330.

(9) Yamanaga, K., et al, Stress intensity factor analysis of a crack on an interface between dissimilar anisotropic materials, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 69, No. 687 (2003), pp. 1531- 1538.

(10) Matos, P. P. L. et al, A method for calculating stress intensities in bimaterial fracture, *International Journal of Fracture*, Vol. 40 (1989), pp. 235-254.

(11) Ting. T. C. T., *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications, Oxford Univ. Press*, (1996), pp. 134-263.

(12) Barnett, D. M. and Lothe, Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green's function and structure waves in anisotropic elastic solids, *Physsica Norvegica*, Vol. 7 (1973), pp. 13-19.

(13) Ting. T. C. T., Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22 (1986), pp. 965-983.

(14) Ikeda, T. et al, Mixed Mode Fracture Criteria of Interface Crack between Dissimilar Materials, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 58, No. 555 (1992), pp. 2080-2087.

(15) Parks, D. M., Virtual crack extension: a general finite element technique for J-integral evluation, *Proceedings 1st International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics* (1978), pp. 464-478.

(16) Ikeda, T. et al, Stress Intensity Factor Analysis of an Interface Crack between Dissimilar Materials under Thermal Stress Condition by Virtual Crack Extension Method, *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 63, No. 611 (1997), pp. 1377-1384.

(17) Miyazaki, N. et al, Stress Intensity Factor Analysis by Combination of Boundary Element and Finite Element Methods (Application to Mixed-Mode Crack Problems), *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 55, No. 513 (1989), pp. 1180-1184.

(18) Yau, J. F. and Wang, S. S., An analysis of interface cracks between dissimilar isotropic materials using conservation integrals in elasticity, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 20, No. 3 (1984), pp. 423-432.

(19) Choy, M. M. et al, *Landolt-Börnstein Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series*, Vol. 11, No. 53 (1979).

(20) Kurashige, K. et al, Mechanical Properties of a $Gd_2SiO_5$ Single Crystal, *Japanese Journal of applied physics*, Vol. 36 (1997), pp. 2242-2246.