1992

日本機械学会論文集(A 編)
72 巻 724 号(2006-12)

論文 No. 06-0392

# 三次元異方性異種材界面き裂の応力拡大係数解析*

永井政貴*1, 池田 徹*1, 宮崎則幸*1

# Stress Intensity Factors Analyses of Three-Dimensional Interface Crack between Anisotropic Dissimilar Materials

Masaki NAGAI, Toru IKEDA*2 and Noriyuki MIYAZAKI

*2 Department of Mechanical Engineering and Science, Graduate School of Engineering, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501 Japan

A new numerical method to calculate the stress intensity factors (SIFs) of a three-dimensional interface crack between dissimilar anisotropic materials was developed. In this study, the M-integral method, usually used as a post-processing step of the finite element method, was employed for the mode separation of the SIFs. The moving least square method was used to calculate the M-integral. Using the M-integral with the moving least square method, the SIFs can be automatically calculated without the need for a complex, time-consuming procedure. The SIFs analyses of some typical three-dimensional problems are demonstrated. Excellent agreement was achieved between the numerical results obtained by the present method and corresponding results proposed by other researchers.

***Key Words*** : Finite Element Method, Stress Intensity Factor, Fracture Mechanics, Anisotropy, M-integral, Interface, Moving Least Square Method

## 1. 緒 言

近年，異種材料間の強度信頼性評価に，界面破壊力学が応用され始めているが，複合材料や単結晶のような異方性を有する材料が使用される場合を考慮した，異方性異種材界面破壊力学の確立が急務になっている．

異種材界面き裂の応力拡大係数は，異種材界面き裂の定量的評価をする上でエネルギー解放率や J 積分と並んで重要な破壊力学パラメータである．Hwu[1]は，Stroh Formalism[2]を用いて，異方性異種材界面き裂先端近傍の変位と応力の漸近解を明らかにし，異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を定義した．また，その応力拡大係数を求めるための数値解析手法としては，Qian and Sun[3]が，材料の対称面の一つが，図 1 に示すき裂周りの座標系における $x_1$-$x_2$ 面と平行な直交異方性材料間の異種材界面き裂の応力拡大係数を求める手法を提案している．著者らは既報[4, 5]において，Hwu[1]により求められた異方性異種材界面き裂先端近傍の漸近解を利用して，仮想き裂進展法に重ね合わせの原理を適用した Matos[6]らの方法を適用することで，任意の異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を解析する手法を開発している．

しかし，上記で開発された数値解析手法はいずれも二次元解析手法であり，これらの手法では，実構造部材中に存在する三次元き裂の正確な評価を行うことができない．また，三次元き裂の解析においては，既存の均質体中のき裂の解析でさえ，解析準備に煩雑な処理が必要である．

そこで，本研究では，これまでに開発した二次元解析手法を基礎に，移動最小自乗法と *M* 積分を組み合わせることで，簡便に三次元異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を解析する手法を開発した．

## 2. 異方性異種材界面き裂の応力拡大係数

図 1 に示すような異方性異種材界面き裂の一般解は，Stroh Formalism[2,7]を用いると，次式のように示される[1]．

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j &= \mathbf{A}_j\mathbf{f}_j(z) + \overline{\mathbf{A}_j\mathbf{f}_j(z)} \\ \boldsymbol{\varphi}_j &= \mathbf{B}_j\mathbf{f}_j(z) + \overline{\mathbf{B}_j\mathbf{f}_j(z)} \quad \text{, in Material } j \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，$\mathbf{u}_j$, $\boldsymbol{\varphi}_j$はそれぞれ材料 $j$ の変位 ($u_\alpha$; $\alpha$ = 1, 2, 3) および応力関数 ($\varphi_{\alpha,1} = \sigma_{\alpha 2}$, $\varphi_{\alpha,2} = -\sigma_{\alpha 1}$; $\alpha$ = 1, 2, 3) である．$\mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}_j$ は，Stroh の固有ベクトルによりなるマトリ

* 原稿受付 2006 年 4 月 12 日.
*1 正員，京都大学大学院工学研究科(〒606-8501 京都市左京区吉田本町).
E-mail : ikeda@mech.kyoto-u.ac.jp

ックスを，上付きバーは，共役を示す．式(1)において $\mathbf{f}_1(z), \mathbf{f}_2(z)$ は，次のような関数である．

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1(z) &= \mathbf{B}_1^{-1}\boldsymbol{\Psi}(z)\\ \mathbf{f}_2(z) &= \mathbf{B}_2^{-1}\overline{\mathbf{M}}^{*-1}\mathbf{M}^*\boldsymbol{\Psi}(z)\end{aligned} \tag{2}$$

$\mathbf{M}^*$ は，次のような二つの材料の Barnett-Lothe テンソル $\mathbf{S}_j, \mathbf{L}_j$ より得られる．

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{D} - i\mathbf{W} \tag{3}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}_1^{-1} + \mathbf{L}_2^{-1}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{S}_1\mathbf{L}_1^{-1} - \mathbf{S}_2\mathbf{L}_2^{-1} \tag{4}$$

また，Barnett-Lothe テンソル $\mathbf{S}_j$，$\mathbf{L}_j$ は，材料 $j$ の 3×3 の実数マトリックスであり，次式のように示される[8]．

$$\mathbf{S}_j = i\left(\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j^T - \overline{\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j^T}\right), \quad \mathbf{L}_j = -2i\mathbf{B}_j\mathbf{B}_j^T \tag{5}$$

Hwu は，従来の均質体中のき裂と互換性のある異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を，次のように定義した[1]．

$$\mathbf{K} = \begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\,\boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle (r/l_k)^{-i\varepsilon_\alpha} \right\rangle\right\rangle \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \left[\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3\right] \tag{7}$$

ここで，$r$ はき裂先端からの距離，$l_k$ は任意の代表長さであり，≪ ≫は，$\alpha$= 1, 2, 3 なる対角成分をもつ対角マトリックスであることを示す．また，$\lambda_\alpha$は，次式の固有関係を満たす固有ベクトルである．

$$\left(\mathbf{M}^* + e^{2i\pi\delta}\overline{\mathbf{M}}^*\right)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \tag{8}$$

この式の固有値 $\delta_\alpha$ は，Ting により次のように求められている[9]．

$$\delta_\alpha = -\frac{1}{2} + i\varepsilon_\alpha, \quad \alpha = 1,2,3 \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad \varepsilon_2 = -\varepsilon, \quad \varepsilon_3 = 0,\\ &\beta = \left[-\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\mathbf{WD}^{-1}\right)^2\right]^{1/2}\end{aligned} \tag{10}$$

均質体中のき裂の場合，モード II，I，III の応力場は互いに独立しているが，異方性異種材界面き裂の場合，一般的にこれらは連成しており，独立したモードは存在しない．ただし，二つの材料の対称面の一つが，それぞれ $x_1$-$x_2$ 面と平行な場合は，モード III が独立成分となり，モード II と I のみが連成する．

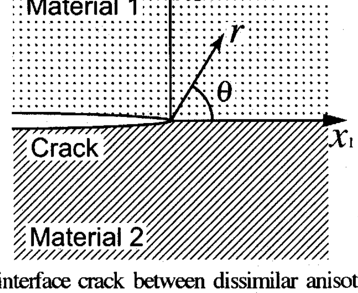



Fig. 1 An interface crack between dissimilar anisotropic media.

また，異方性異種材界面き裂の応力拡大係数を混合モードの破壊靭性値として利用するためには，応力拡大係数が一意的にき裂先端の応力場を規定する必要がある．このためには，$l_k$ が同じ値のときの応力拡大係数を用いるべきである．本研究では，これまでの等方性異種材界面き裂の研究[10]を参考にして，便宜的に $l_k$ = 10μm として計算している．また $l_k$ を $l'_k$ に変化させた場合の応力拡大係数の変換式は次式で示される．

$$\mathbf{K}' = \boldsymbol{\Lambda}\left\langle\left\langle \left(l'_k/l_k\right)^{i\varepsilon_\alpha} \right\rangle\right\rangle \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{K} \tag{11}$$

一方，エネルギー解放率 $G$ と応力拡大係数 $\mathbf{K}$ の間には，次のような関係がある[1]．

$$G = \frac{1}{4}\mathbf{K}^T\mathbf{E}\mathbf{K}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{D} + \mathbf{W}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{W} \tag{12}$$

## 3．解析方法

**3.1 移動最小自乗法**　本論文では，$M$ 積分を計算する際に必要となる任意の点でのひずみ・応力値を，有限要素法解析結果の節点変位より，移動最小自乗法を用いて近似することで得ている．これにより，入力データの大幅な削減と，解析の自動化を可能にしている．以下に，移動最小自乗法について簡単に説明する．

任意の点 $\boldsymbol{x}$ での変位 $\mathbf{u}^h(\boldsymbol{x})$ を，$\mathbf{p}^T(\boldsymbol{x}) = \{1, x, y, z\}$ を基底関数として近似的に次式のように表す．

$$\mathbf{u}^h(\boldsymbol{x}) = \mathbf{p}^T(\boldsymbol{x})\mathbf{a}(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

式(13)で，未定係数 $\mathbf{a}(\boldsymbol{x})$ は，次式で定義される重み付き自乗和 $R(\boldsymbol{x})$ を最小にするように決定される．

$$R(\boldsymbol{x}) = \sum_I^n w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I)[\mathbf{p}^T(\boldsymbol{x}_I)\mathbf{a}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{u}_I]^2 \tag{14}$$

ここで，$\mathbf{u}_I$ は，評価点 $\boldsymbol{x}$ から定めた影響半径の領域内に分布する節点の変位，$w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I)$ は点 $\boldsymbol{x}$ の近傍で定義される重み関数である．本論文では重み関数には次式の指数型の関数を用いた．

$$w(\rho) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-(\rho/c)^2\right) - \exp\left(-(1/c)^2\right)}{1 - \exp\left(-(1/c)^2\right)}, & \text{if } \rho \le 1 \\ 0, & \text{if } \rho > 1 \end{cases} \tag{15}$$

ここで，$\rho = d_I / d_{mI}$，$d_I = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_I\|$ である．$d_{mI}$ は影響半径であり，評価点から三番目に近い節点と評価点との距離を 3.5 倍した値とした．また，$c$ は重み関数を制

御する変数で $c$ = 0.50 とした．式(14)から未定係数 $\mathbf{a}(\boldsymbol{x})$ を決定すると，式(13)は次式のようになる．

$$\mathbf{u}^h = \sum_I^n \sum_j^m p_j(\boldsymbol{x})\left[\mathbf{X}^{-1}(\boldsymbol{x})\mathbf{Y}(\boldsymbol{x})\right]_{jI}\mathbf{u}_I \equiv \sum_I^n \phi_I(\boldsymbol{x})\mathbf{u}_I \quad (16)$$

近似関数 $\phi_I(\boldsymbol{x})$は次式から得られる．

$$\phi_I(\boldsymbol{x}) = \sum_j^m p_j(\boldsymbol{x})\left[\mathbf{X}^{-1}(\boldsymbol{x})\mathbf{Y}(\boldsymbol{x})\right]_{jI} \quad (17)$$

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{x}) = \sum_I^n w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_I)\mathbf{p}^T(\boldsymbol{x}_I) \quad (18)$$

$$\mathbf{Y}(\boldsymbol{x}) = \left[w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_1), w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_2)\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_2), \ldots, w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_n)\mathbf{p}(\boldsymbol{x}_n)\right] \quad (19)$$

界面に近い評価点の変位場を近似する場合は，影響半径内の節点で界面をまたいでいるものを除外して計算している．こうすることで界面での変位勾配の不連続を取り扱うことができる．

**3.2 三次元 $M$ 積分** 2章で述べたとおり，異方性異種材界面き裂の場合，荷重条件が単一モードであっても，応力拡大係数は混合モード状態となり，モード分離が必要となる．Yau and Wang[11]は，応力拡大係数の重ね合わせの原理と $J$ 積分を利用した，混合モードき裂のモード分離を行う $M$ 積分を，異種材界面き裂に適用した．本論文では，この $M$ 積分を三次元異種材界面き裂問題に適用した．以下にその概略を示す．

三次元問題の $J$ 積分は次式のように定義される[12]．

$$J_1 = \int_\Gamma \left\{ W n_1 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right\} d\Gamma - \iint_\Omega \frac{\partial}{\partial x_3}\left( \sigma_{i3} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) d\Omega \quad (20)$$

ここで，$\Gamma$ はき裂前縁に垂直な平面上でき裂先端を囲む経路，$\Omega$は上記平面上で$\Gamma$ で囲まれる面領域を示す．また，$W$ はひずみエネルギー密度，$n_1$ は $\Gamma$ 上での法線ベクトルの $x_1$ 方向成分，$T_i$ は $\Gamma$ 上に作用する表面力ベクトル，$u_i$ は変位，$\sigma_{ij}$ は応力を示す．平面ひずみ問題では，変形は $x_1$, $x_2$ のみに依存するので，式(20)の面積分項は0となる．

解析対象に，あらかじめ変位，応力，応力拡大係数が既知な平面ひずみ状態にある解を重ね合わせることを考える．解析対象を状態(1)，重ね合わせる既知の解を状態(2)，両者を重ね合わせた状態を(1+2)とすると，状態(1+2)の任意の点の変位，応力，応力拡大係数に次のような重ね合わせの法則が成り立つ．

$$\begin{cases} u_i^{(1+2)} = u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \\ \sigma_{ij}^{(1+2)} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \\ \mathbf{K}^{(1+2)} = \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} \end{cases} \quad (21)$$

したがって，式(12)より状態(1+2)のエネルギー解放率は次のようになる．

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}\right\}^T \mathbf{E}\left\{\mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)}\right\} \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(1)}\right\} \end{aligned} \quad (22)$$

これを変形すると次式が得られる．

$$\frac{1}{4}\left\{\mathbf{K}^{(1)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(2)T}\mathbf{E}\mathbf{K}^{(1)}\right\} = J^{(1+2)} - J^{(1)} - J^{(2)} = M \quad (23)$$

ここで，

$$\begin{aligned} M = &\int_\Gamma \left\{ \sigma_{ij}^{(1)}\varepsilon_{ij}^{(2)} n_1 - \left[ T_i^{(1)}\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + T_i^{(2)}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] \right\} d\Gamma \\ &- \iint_\Omega \left\{ \frac{\partial \sigma_{i3}^{(1)}}{\partial x_3}\frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{i3}^{(2)}\frac{\partial^2 u_i^{(1)}}{\partial x_3 \partial x_1} \right\} d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

式(23)において，左辺の $\mathbf{E}$, $\mathbf{K}^{(2)}$は既知であるので，3つの独立した既知の解を解析対象に重ね合わせることによって，式(24)の $M$ 積分値より $\mathbf{K}^{(1)}$を求めることができる．例えば，重ね合わせる既知の解として，異方性異種材界面き裂の漸近解の式(1)～(10)を用いる場合を考える．この漸近解について，既知の解 ($a$) [ $K_{\mathrm{II}} = 1, K_{\mathrm{I}} = 0, K_{\mathrm{III}} = 0$ ], ($b$) [ $K_{\mathrm{II}} = 0, K_{\mathrm{I}} = 1, K_{\mathrm{III}} = 0$ ], ($c$) [ $K_{\mathrm{II}} = 0, K_{\mathrm{I}} = 0, K_{\mathrm{III}} = 1$ ]の場合を重ね合わせると，式(23)より，次式の連立1次方程式を求めることができる．

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}}^{(1)} \\ K_{\mathrm{I}}^{(1)} \\ K_{\mathrm{III}}^{(1)} \end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix} M_{(a)} \\ M_{(b)} \\ M_{(c)} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

これを解くことで，解析対象の応力拡大係数 $K_{\mathrm{II}}^{(1)}$, $K_{\mathrm{I}}^{(1)}$, $K_{\mathrm{III}}^{(1)}$ が得られる．実際の解析では，桁落ちが生じないように，適当な大きさの応力拡大係数の値を重ね合わせる漸近解に用いる．

## 4．解析結果

3章で述べた解析手法の有効性を検討するため，以下に示すような幾つかの三次元問題を解析した．

**4.1 等方性均質体中の楕円板状き裂** 遠方で一様応力 $\sigma_0$ が作用する楕円板状き裂問題(Example 1)を考える．この問題の理論解は Irwin[13]により導出されており，次式のように示される．

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{\sigma_0\sqrt{\pi a}}{E(k)}\left(1 - k^2\cos^2\varphi\right)^{1/4} \quad (26)$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2}\left(1 - k^2\sin^2\theta\right)^{1/2} d\theta, \quad k^2 = \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right) \quad (27)$$

ここで，$\varphi$は図3に示すようなき裂前縁上の点を示す離心角，$2a$, $2c$ はそれぞれ楕円の短軸，長軸の長さを示す．有限要素法解析は，図2に示すような1/4モデルで行い，$a$ = 10mm, $c$ = 25mm, $\sigma_0$ = 10MPa として，

六面体アイソパラメトリック二次要素（特異要素は用いていない）を用いて，汎用コードMARCで行った．また，要素分割は，き裂長さ $a$ に対してき裂先端周りの最小要素サイズが1/20となるように，要素数54604，節点数230799とした．材料定数は，ヤング率 $E$ = 150GPa，ポアソン比 $\nu$=0.3とした．

以上のような条件で，図4に示すような任意の4経路について解析を行った．き裂前縁の各点での計算結果の理論解に対する誤差を，表1に示した．解析精度の比較のために，次式に示すような変位外挿法によっても計算を行った．

$$K_{\mathrm{I}} = \lim_{r\to 0}\frac{E\Delta u_2}{8(1-\nu^2)}\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \tag{28}$$

ここで，$\Delta u_2$は上下のき裂面の$x_2$方向の相対変位である．

表1の結果から，積分経路をPath 1のように比較的き裂先端近くに設定した場合は，若干精度が低下するが，他の経路Path 2～Path 4は，ほぼ1%以内の高精度な結果が得られており，$M$ 積分の経路独立性が成立していることがわかる．一方，変位外挿法では，誤差が2～5%も有り，高精度な結果を得るには，更に細かな要素分割が必要である．

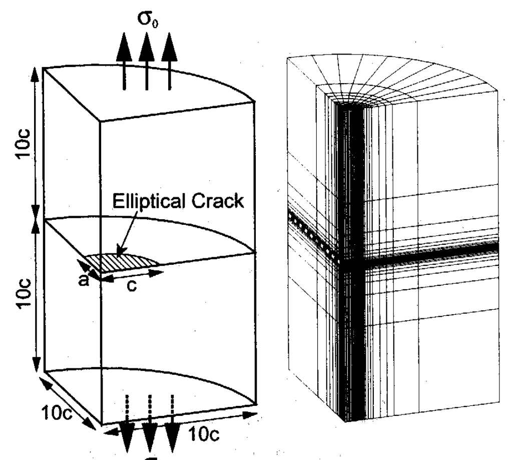



Fig.2 An elliptical crack in homogeneous material.

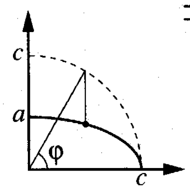



Fig. 3 Angle $\varphi$.

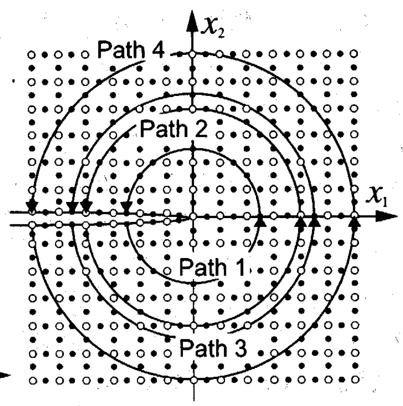



Fig. 4 $M$-integral paths for example.

Table 1 Errors of stress intensity factor $K_{\mathrm{I}}$ of an elliptical crack in homogeneous material obtained by present method (%).

| φ (degree) | Path 1 | Path 2 | Path 3 | Path 4 | D.E. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | – | – | – | – | –2.977 |
| 7.5 | 3.216 | 0.302 | 1.206 | 0.402 | –4.079 |
| 15.0 | 0.286 | 1.143 | 0.762 | 0.667 | –4.381 |
| 22.5 | –1.868 | –0.178 | –0.178 | 0.267 | –4.270 |
| 30.0 | –1.166 | 0.000 | 0.583 | 0.250 | –4.746 |
| 37.5 | –0.549 | 0.784 | 0.627 | 0.392 | –5.094 |
| 45.0 | –0.521 | 0.595 | 0.149 | 0.149 | –5.060 |
| 52.5 | –0.998 | 0.142 | 0.142 | 0.356 | –4.562 |
| 60.0 | –0.758 | 0.413 | 0.207 | 0.275 | –4.396 |
| 67.5 | –0.805 | 0.067 | 0.067 | 0.268 | –4.292 |
| 75.0 | –0.593 | 0.264 | 0.132 | 0.395 | –2.042 |
| 82.5 | –0.586 | 0.000 | 0.000 | 0.261 | –2.280 |
| 90.0 | – | – | – | – | –4.675 |

D.E.: Displacement Extrapolation method

**4.2　等方性異種材界面円板状き裂**　次に，図5に示すような界面に半径 $a$ の円板状き裂をもつ異種材接合体について，遠方で一様応力 $\sigma_0$ が作用する問題(Example 2)を解析した．この問題の理論解はKassir and Bregman[14]によって導出されており，次式で示される．

$$K_{\mathrm{I}} + iK_{\mathrm{II}} = 2\sigma_0\sqrt{a}\,\frac{\Gamma(2+i\varepsilon)}{\Gamma(1/2+i\varepsilon)} \quad \text{for } l_k = 2a \tag{29}$$

ここで，$\Gamma(x)$はガンマ関数，$a$ はき裂半径である．また側面には，界面端部に特異応力場が生じない様に，次式のような一様応力$\sigma_1, \sigma_2$を負荷している．

$$\sigma_2 = \frac{1}{1-\nu_2}\left[\frac{\mu_2}{\mu_1}(1-\nu_1)\sigma_1 + \left\{\nu_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\nu_1\right\}\sigma_0\right] \tag{30}$$

ここで，$\mu_j$, $\nu_j$はそれぞれ材料 $j$ のせん断弾性係数およびポアソン比である．解析は，図5に示すような1/4モデルで行い，$a$ = 10mm，$\sigma_0$ = 10MPaとした．材料の組合せは，表2に材料定数を示す組合せとした．また，要素分割の精粗が解析精度に及ぼす影響を検証するため，表3に示す3種類の要素分割を使用した．

まず，Mesh 2を用いて，図4の4経路について解析を行った．き裂前縁の $\theta$ = 45°（図5参照）の点における解析結果と理論解に対する誤差を表4に示す．ここでは，応力拡大係数の誤差は次式のように計算した．

$$Error_i = \frac{K_i - K_{i\,exact}}{\sqrt{K_{\mathrm{I}\,exact}^2 + K_{\mathrm{II}\,exact}^2 + K_{\mathrm{III}\,exact}^2}} \quad (i = \mathrm{I, II, III}) \tag{31}$$

ここで，$Error_i$ は解析誤差(%)で，$K_{i\,exact}$ は応力拡大係数の理論解である．表4より，経路独立性が成立しているのがわかる．また，モードIが支配的な荷重条件であるため，誤差はモードIが比較的大きくなっているが，1%前後に収まっており，高精度に解析できることがわかった．

次に，Mesh 2を用いて，き裂前縁に沿った解析結

果を図6に示した．積分経路は図4のPath 2 ( r = 2.00 mm )とした．図 6 を見ると，対称面に近くなると精度が低下している．このことは，境界付近では移動最小自乗法を行うのに必要な節点が不足することから，十分な精度の近似が行えていないことに起因すると考えられる．また，境界上では本手法は適用できない．

また，要素分割の精粗が解析結果にどのように影響するかを調べるために，θ = 45°での解析誤差のメッシュによる変化を図 7 に示した．比較のために，次式のような変位外挿法によって計算した値も共に示した．

$$\begin{Bmatrix}K_{II}\\ K_{I}\\ K_{III}\end{Bmatrix} = \lim_{r\to 0}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\,\Lambda\left\langle\!\left\langle\frac{(1+2i\varepsilon_\alpha)\cosh(\pi\varepsilon_\alpha)}{(r/l_k)^{i\varepsilon_\alpha}}\right\rangle\!\right\rangle\bar{\Lambda}^T\begin{Bmatrix}\Delta u_1\\ \Delta u_2\\ \Delta u_3\end{Bmatrix} \qquad (32)$$

ここで，$\Delta u_1$, $\Delta u_2$, $\Delta u_3$ は上下のき裂面の $x_1$, $x_2$, $x_3$ 方向の相対変位である．図 7 を見ると，本論文で提案した手法は，最小の要素がき裂長さに対して 1/10 のサイズしかない Mesh 1 では，誤差が 2%近くあるが，1/20 サイズの Mesh 2 では 1%，1/40 サイズの Mesh 3 では 0.5%以内に収まっている．一方，変位外挿法では，Mesh 3 においても支配的な応力拡大係数 $K_I$ は，3.5% もの誤差が有り，高精度な解析には，更なる要素分割が必要である．いずれの手法においても，要素分割を細かくすれば確実に精度は上昇している．

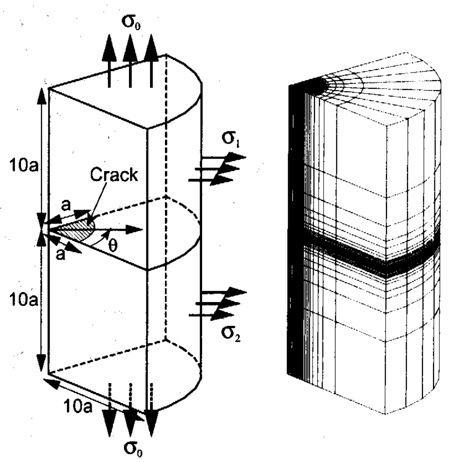



Fig. 5 A penny-shaped crack between isotropic bi-materials.

Table 2 Combination of materials for example 2.

| Combination | Young's modulus (GPa) | Poisson's ratio |
|---|---|---|
| Material 1 | 150 | 0.30 |
| Material 2 | 20 | 0.25 |

Table 3 Finite element meshes for example 2.

| Mesh | Number of nodes | Number of elements | *m/a* |
|---|---|---|---|
| Mesh 1 | 41493 | 9386 | 0.1 |
| Mesh 2 | 131239 | 30770 | 0.05 |
| Mesh 3 | 238369 | 56680 | 0.025 |

*m*: size of the smallest element around a crack tip.

Table 4 Energy release rate (J/m$^2$) and stress intensity factor (MPa$\sqrt{\mathrm{m}}$, $l_k$= 10μm) calculated by the present method (Mesh 2).

| | Path 1 | Path 2 | Path 3 | Path 4 | Exact |
|---|---|---|---|---|---|
| $G$ | 32.59 | 32.72 | 32.72 | 32.74 | 32.37 |
| | (0.685%) | (1.082%) | (1.067%) | (1.142%) | |
| $K_{II}$ | 0.4880 | 0.4938 | 0.4944 | 0.4957 | 0.4960 |
| | (−0.704%) | (−0.199%) | (−0.142%) | (−0.031%) | |
| $K_I$ | 1.043 | 1.045 | 1.044 | 1.044 | 1.033 |
| | (0.912%) | (1.015%) | (0.976%) | (0.976%) | |
| $K_{III}$ | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.001 | 0.000 |
| | (−0.008%) | (−0.008%) | (−0.008%) | (−0.008%) | |

( ): Relative error of numerical results.

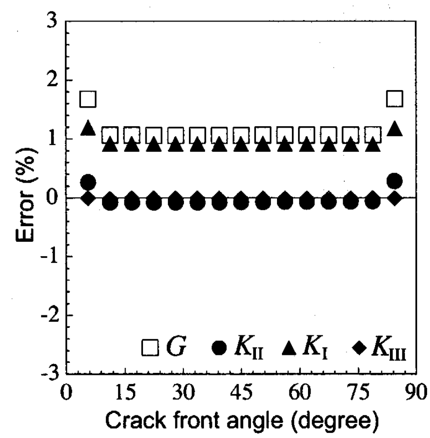



Fig. 6 Distribution of errors of the stress intensity factors along the crack front of a penny-shaped interfacial crack (Mesh 2).

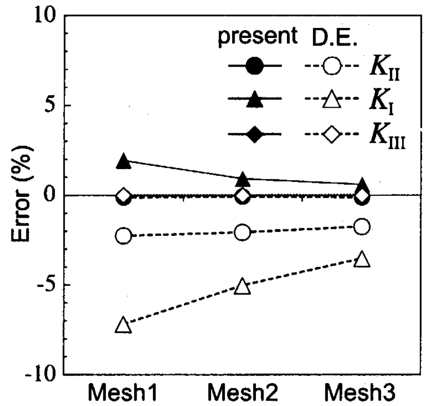



Fig. 7 Errors of stress intensity factors calculated by the present and the displacement extrapolation methods.

**4.3 異方性異種材界面片側き裂** 次に，図 8 に示すような，界面に片側き裂を持つ接合体(Example 3)について解析した．なお，ここでは，$a/W$ = 0.5, $t/W$ = 1.0, $h/W$ = 1.0, $a$ = 10mm, $\sigma_0$ = 10MPa とした．材料の組合せとして表 5 に示す弾性定数[8,15,16]を使い，表 6 の組合せで解析を行った．弾性定数は図 8 に示す全体座標系 $xyz$ に対応している．Aragonite と Topaz は直交異方性材料，GSO と $CaSO_4$ は単斜晶材料である．解の収束性を確認するため，表7に示すような3種類の要素分割を使用した．

紙面の都合上，結果は割愛するが，この問題についても $M$ 積分の経路独立性が成立することを確認した．

各要素分割により求めた，き裂前縁中央部 (z＝10mm, 図8参照) でのエネルギー解放率と応力拡大係数を表8～10に示す．これより，どのケースについても要素分割が細かくなるにつれて，値が収束していっているのがわかる．

次に，Mesh 5 を使用して，各ケースについてき裂前縁に沿った，応力拡大係数の解析結果を図9に示す．比較として，Mesh 6 を使用した場合の変位外挿法の結果と，同モデルの二次元解析の結果をともに示す．

図9より，まず精度を検証する．結果を見ると，本手法と変位外挿法とで，モードIの値にずれが見られる．Example 2 の結果を参考にすると，このずれは，Mesh 6 程度の要素分割を用いても変位外挿法の精度が本手法より劣るため生じたと考えられる．しかし，z 方向分布の傾向は両手法ともに同じ傾向を示していることから，本手法の結果は z 方向の分布についても信頼できると考えられる．他の成分については，値・傾向ともに両手法がほぼ一致している．ただし，単斜晶材料間のき裂の場合は，モードIIIの値も両手法で違いが見られた．しかし，表10よりモードIIIに関しては値がすでに収束していることから，本手法の解の方が信頼できると考えた．

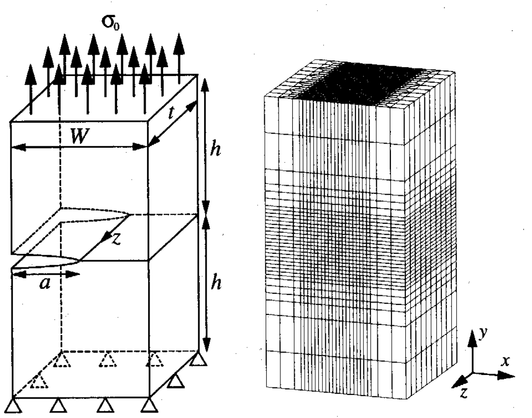



Fig.8 Single-edge interface crack between anisotropic bi-materials. ($a$＝10 mm, $W$＝$t$＝$h$＝20 mm)

Table 5 Elastic stiffnesses $C_{ij}$ (GPa) of anisotropic materials

| Elastic Stiffnesses | Aragonite | Topaz | GSO | $CaSO_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $C_{11}$ | 160 | 281 | 223 | 94.5 |
| $C_{12}$ | 36.6 | 126 | 108 | 37.9 |
| $C_{13}$ | 1.97 | 84.6 | 98.5 | 28.2 |
| $C_{15}$ | 0 | 0 | 84 | −11 |
| $C_{22}$ | 87 | 349 | 150 | 65.2 |
| $C_{23}$ | 15.9 | 88.2 | 102 | 32 |
| $C_{25}$ | 0 | 0 | 33.3 | 6.9 |
| $C_{33}$ | 85 | 295 | 251 | 50.2 |
| $C_{35}$ | 0 | 0 | −6 | −7.5 |
| $C_{44}$ | 41.3 | 108 | 78.8 | 8.6 |
| $C_{46}$ | 0 | 0 | 6.6 | −1.1 |
| $C_{55}$ | 25.6 | 133 | 68.8 | 32.4 |
| $C_{66}$ | 42.7 | 131 | 82.7 | 10.8 |

Table 6 Combinations of materials for examples 3 and 4.

| Combinations | Material 1 | Material 2 |
|---|---|---|
| Case 1 | Aragonite (Orthotropic) | Topaz (Orthotropic) |
| Case 2 | Aragonite (Orthotropic) | GSO (Monoclinic) |
| Case 3 | GSO (Monoclinic) | $CaSO_4$ (Monoclinic) |

Table 7 Finite Element meshes for example 3.

| Mesh | Number of nodes | Number of elements | $m/a$ |
|---|---|---|---|
| Mesh 4 | 31419 | 7040 | 0.1 |
| Mesh 5 | 136089 | 32000 | 0.05 |
| Mesh 6 | 261337 | 62320 | 0.025 |

$m$: size of the smallest element around a crack tip.

Table 8 Calculated stress intensity factors (Example 3 - Case 1)

| | $m/a$ | $G$ | $K_{\mathrm{II}}$ | $K_{\mathrm{I}}$ | $K_{\mathrm{III}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\mathrm{J/m^2}$ | $\mathrm{MPa\sqrt{m}}$, $l_k=10\mu\mathrm{m}$ | | |
| Mesh 4 | 0.1 | 168.5 | −1.402 | 4.785 | − |
| Mesh 5 | 0.05 | 172.9 | −1.428 | 4.858 | − |
| Mesh 6 | 0.025 | 175.4 | −1.444 | 4.898 | − |

Table 9 Calculated stress intensity factors (Example 3 - Case 2)

| | $m/a$ | $G$ | $K_{\mathrm{II}}$ | $K_{\mathrm{I}}$ | $K_{\mathrm{III}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\mathrm{J/m^2}$ | $\mathrm{MPa\sqrt{m}}$, $l_k=10\mu\mathrm{m}$ | | |
| Mesh 4 | 0.1 | 239.1 | −0.790 | 5.065 | −0.510 |
| Mesh 5 | 0.05 | 245.0 | −0.803 | 5.135 | −0.516 |
| Mesh 6 | 0.025 | 248.9 | −0.810 | 5.183 | −0.519 |

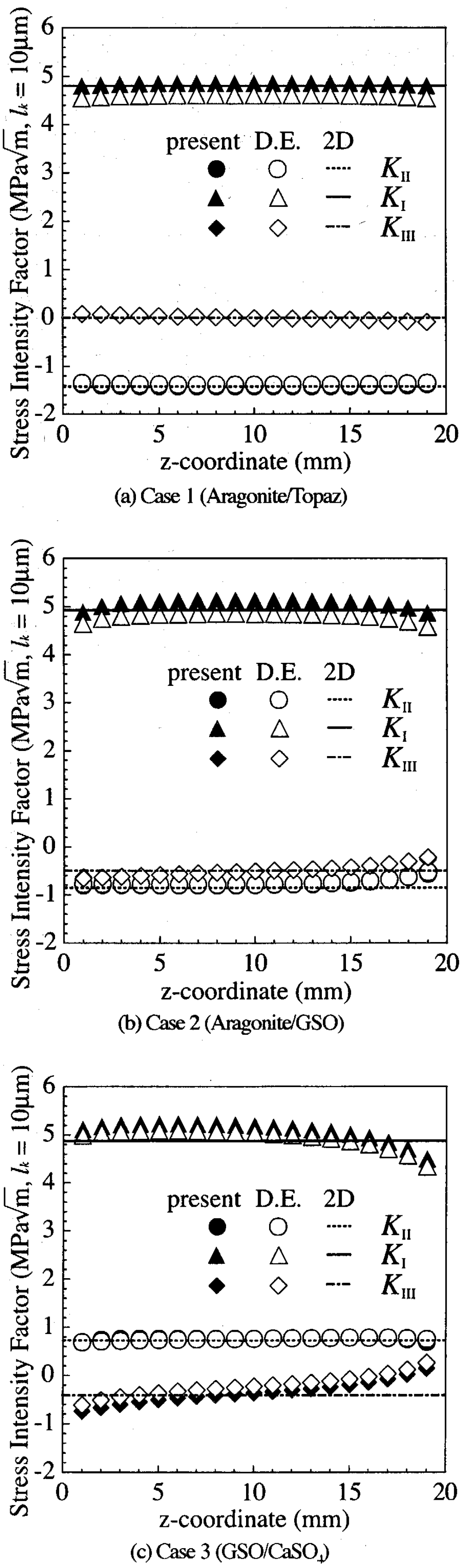
Table 10 Calculated stress intensity factors (Example 3 - Case 3)

| | $m/a$ | $G$ | $K_{\mathrm{II}}$ | $K_{\mathrm{I}}$ | $K_{\mathrm{III}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\mathrm{J/m^2}$ | $\mathrm{MPa\sqrt{m}}$, $l_k=10\mu\mathrm{m}$ | | |
| Mesh 4 | 0.1 | 430.0 | 0.773 | 5.143 | −0.354 |
| Mesh 5 | 0.05 | 436.2 | 0.780 | 5.188 | −0.355 |
| Mesh 6 | 0.025 | 441.3 | 0.786 | 5.226 | −0.355 |

次に，図9を定性的に考察してみる．直交異方性材料同士の組合せでは，対称面が $x_1$–$x_2$ 面と平行であるので，き裂前縁中央部 (z ＝ 10mm)に関して対称な分布（モードIIIに関しては反対称な分布）を示している．また，き裂前縁中央部では，二次元解析の結果とほぼ一致していることがわかる．しかし，本解析の単斜晶材料は対称面が $x_1$–$x_2$ 面と平行でないため，単斜晶材料の組合せでは，対称な結果が得られていない．また，き裂前縁中央部でも，二次元解析結果と一致していない．このことから，三次元き裂の評価には，二次元解析だけでは不十分であることがわかる．

以上，異方性材料間のき裂についても，本手法は精度良く解析できることを示した．

**4.4 異方性異種材界面半円板状表面き裂**　最後に，図10に示すような半円状の表面界面き裂を持つ異種材接合体について解析した．なお，ここでは，




(a) Case 1 (Aragonite/Topaz)

(b) Case 2 (Aragonite/GSO)

(c) Case 3 (GSO/$CaSO_4$)

Fig. 9 Distributions of stress intensity factors along the crack front of a single-edge interfacial crack (D.E.: Displacement Extrapolation method).

$a/W = 0.1$, $t/W = 0.5$, $h/W = 1.0$, $a = 10$mm, $\sigma_0 = 10$MPa とした．材料は表 5 に示す材料定数を使い，表 6 の組合せで解析を行った．要素分割は，き裂半径 $a$ に対してき裂先端周りの最小要素サイズが1/20となるように，要素数46716，節点数196753とした．

各ケースについて解析した結果を図 11 に示す．なお，Example 1 ～ 3 の結果より本手法の解析結果は信頼できると考え，この問題では，本手法の結果のみを示す．結果を見ると，直交異方性材料同士の組合せでは対称面が解析座標と一致しているため，き裂前縁90°について対称な結果（モード III に関しては反対称な結果）が得られている．しかし，単斜晶材料が組合せに加わってくると，もはや対称な結果は得られず，き裂前縁に沿って複雑な分布になっている．このように，異方性が強い材料間での三次元き裂はその先端の性質がき裂前縁の位置によって全く異なっており，このことが実際の破壊でどのように影響を示すかは，興味深い問題であると思われる．

## 5．結　　言

任意の異なる異方性材料により構成された三次元接合体の界面に存在するき裂の応力拡大係数を高精度に解析する手法を開発した．また，本手法では，移動最小自乗法と $M$ 積分を用いることで大幅な解析の自動化を可能にしており，汎用の有限要素法コードの結果の節点データだけを入力データとして簡便に解析を行うことができる．この手法を，典型的な三次元き裂問題に適用し，得られた結果が精度良く求められていることを確認した．

本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金の援助により行われた．記して感謝する．

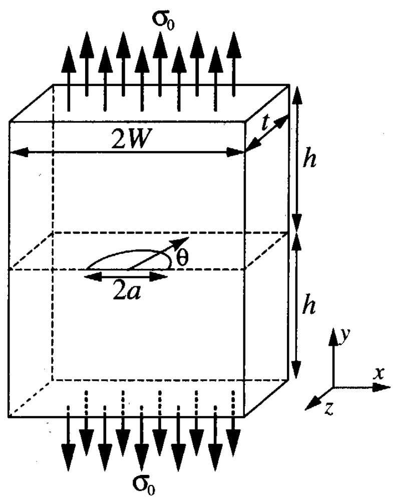
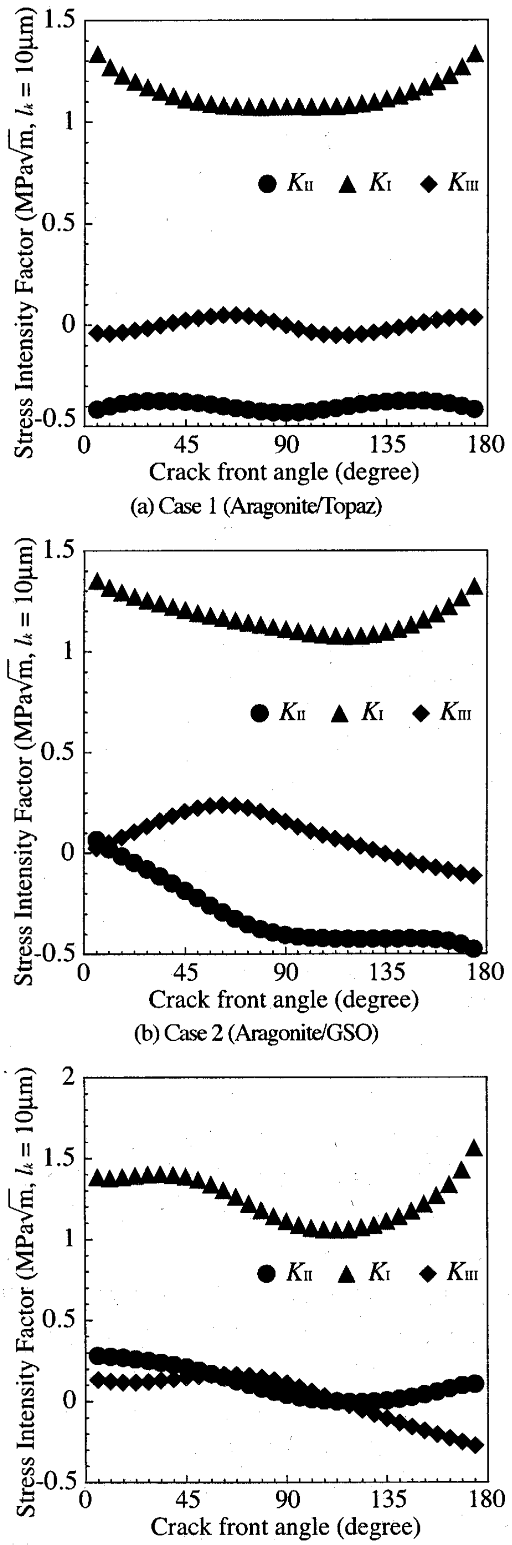



Fig.10 A semi-circular surface crack between anisotropic bi-materials ($a = 10$ mm, $W = h = 100$ mm, $t = 50$ mm)




(a) Case 1 (Aragonite/Topaz)

(b) Case 2 (Aragonite/GSO)

(c) Case 3 (GSO/CaSO$_4$)

Fig. 11 Distributions of stress intensity factors along the crack front of a semi-circular surface crack.

## 文　献


(1) Hwu, C., Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 52 (1991), pp. 239-256.

(2) Stroh, A. N., Dislocation and cracks in anisotropic elasticity, *Philosophical Magazine*, Vol. 7 (1952), pp. 625-646.

(3) W. Qian and C. T. Sun, Methods for stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35 (1997), pp. 3317-3330.

(4) Yamanaga, K. et al., Stress intensity factor analysis of a crack on an interface between dissimilar anisotropic materials, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 69, No. 687 (2003), pp. 1531-1538.

(5) Nagai, M. et al., Stress intensity factor analysis of an interface crack between anisotropic dissimilar materials under thermal stress, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 72, No. 715 (2006), pp. 285-292.

(6) Matos, P. P. L. et al., A method for calculating stress intensities in bimaterial fracture, *International Journal of Fracture*, Vol. 40 (1989), pp. 235-254.

(7) Ting, T. C. T., *Anisotropic Elasticity: Theory and Applications, Oxford Univ. Press*, (1996), pp. 134-263.

(8) Barnett, D. M. and Lothe, Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocations, Green's function and structure waves in anisotropic elastic solids, *Physsica Norvegica*, Vol. 7 (1973), pp. 13-19.

(9) Ting, T. C. T., Explicit solution and invariance of the singularities at an interface crack in anisotropic composites, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 22 (1986), pp. 965-983.

(10) Ikeda, T. et al., Mixed Mode Fracture Criteria of Interface Crack between Dissimilar Materials, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 58, No. 555 (1992), pp. 2080-2087.

(11) Yau, J. F. and Wang, S. S., An analysis of interface cracks between dissimilar isotropic materials using conservation integrals in elasticity, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 20, (1984), pp. 423-432.

(12) Miyamoto, H. et al., Research of *J*-integral for three-dimensional cracks (in Japanese), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 49, No. 439 (1983), pp. 314-321.

(13) Irwin, G. R., Crack-Extension Force for a Part-Through Crack in a Plate, *Transactions of the ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 29 (1962), pp. 651-654.

(14) Kassir, M. K. and Bregman, A. M. The Stress Intensity Factor for a Penny-shaped crack between two dissimilar materials, *Transactions of the ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39 (1972), pp. 308-310.

(15) Choy, M. M. et al., *Landolt-Börnstein Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, New Series*, Vol. 11, No. 53 (1979).

(16) Kurashige, K. et al., Mechanical Properties of a $Gd_2SiO_5$ Single Crystal, *Japanese Journal of applied physics*, Vol. 36 (1997), pp. 2242-2246.