日本機械学会論文集(A編)
74巻737号(2008-1)

論文 No. 07-0664

熱応力下の異方性異種材界面接合端部の特異応力場解析*

野村吉昭*1, 池田 徹*2, 宮崎則幸*3

Stress Singularity Analysis at an Interfacial Corner Between Anisotropic Bimaterials Under Thermal Stress

Yoshiaki NOMURA, Toru IKEDA*4 and Noriyuki MIYAZAKI

*4 Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto-shi, Kyoto, 606-8501 Japan

A numerical method using the path independent H-integral based on the Betti reciprocal principle was developed to analyze the stress intensity factors of an interfacial corner between anisotropic bimaterials under thermal stress. According to the theory of linear elasticity, asymptotic stress near the tip of a sharp interfacial corner is generally singular as a result of a mismatch of elastic constants. The singular order and the eigenfunctions are obtained using the Williams eigenfunction method, which depends on material properties and the geometry of an interfacial corner. The singular order is real, complex or power-logarithmic. The amplitudes of the singular stress terms can be calculated using the H-integral. The stress and displacement around an interfacial corner for the H-integral are obtained by the finite element analysis. A new definition of the stress intensity factors of an interfacial corner that is proposed involves a smooth expansion of the stress intensity factors of an interfacial crack between dissimilar materials. Asymptotic solutions of stress and displacement around an interfacial corner are uniquely obtained using these stress intensity factors.

Key Words : H-integral, Stress Singularity, Interfacial Corner, Anisotropic, Thermal Stress, Stress Intensity Factor, Stroh Formalism, Finite Element Method

1. 緒 言

近年の電子デバイスの高密度化，小型化や MEMS などの開発では，多種多様な材料が積層され，その界面からの破壊が問題となっている．弾性係数の異なる材料の接合端部は応力特異点となり，破壊の起点となる．また，線膨張係数の違いによる熱応力が破壊の原因となっている．さらに，電子デバイスや MEMS などの微小構造物に使用される材料には異方性材料が多い．この様な理由により，熱応力下の異方性異種材界面端部の破壊強度評価手法の確立が望まれている．

界面端部の特異応力場を解析する既往の研究として，Williams [1] は固有値展開手法を発展させ，Hwu [2] は Stroh formalism [3] を用いて異方性異種材界面端部の特異性固有値を求める手法を確立した．また，応力拡大係数を求めるために Carpenter[1], Sinclair ら[4], Babuska ら[5] によって，H-integral が等方性均質体中の端部問題に適用され，Banks-Sills ら[6, 7] によって等方性異種材端部問題，熱応力問題へ拡張された．さらにこの方法は，Labossiere ら[8]や Hwu ら[9]によって異方性異種材接合端部に適用された．しかし，熱応力下で異方性異種材界面端部に適用できる手法はまだ存在していない．

そこで本研究では，Williams の固有値展開法 [1]，Hwu ら [2] によって確立された異方性異種材界面端部の特異性固有値と H-integral を拡張して，熱応力下での異方性異種材界面端部の特異応力場の解析手法を開発した．また，均質体中のき裂，異種材界面き裂にも適用可能なより一般的な応力拡大係数の定義を提案する．この定義は変形モードに対応することから直感的に捉えやすく，３つのモードの応力拡大係数で接合端部近傍の応力・変位場の漸近解を表現できる．この定義を用いてさまざまな異方性異種材界面端部の特異応力場を評価した．以下にその内容を報告する．

* 原稿受付 2007年7月20日.
*1 学生員，京都大学大学院工学研究科(〒606-8501 京都市左京区吉田本町).
*2 正員，京都大学大学院工学研究科.
*3 正員，フェロー，京都大学大学院工学研究科.
E-mail : ikeda@solid.me.kyoto-u.ac.jp

2. 解析理論

2・1 特異性応力場 異種材界面端部の形状を図 1 に示す．端部の特異点を原点として，特異点からの距離を r，界面に対する角度を θ とすると，Williams の固有値展開法より端部近傍の応力・変位場は次式のように示すことができる [7, 8]．

$$\sigma_{ij}^{k} = \sum_{m=\mathrm{I}}^{\mathrm{III}} C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mM}(\theta) + \sigma_{ij0}^{M}(\theta) \qquad (1)$$

$$u_i^{k} = \sum_{m=\mathrm{I}}^{\mathrm{III}} C_m r^{\lambda_m} g_i^{mM}(\theta) + u_{i0}^{M}(r,\theta)$$

ここで，C_m（m=I,II,III）は応力集中の大きさを示すスカラーで，H-integral により求めることができる．λ は特異性固有値，f_{ij}^{mM} と g_i^{mM}（M=Material A or B）は固有関数であり，材料定数と端部形状 α，β から決定され，機械負荷や熱負荷には影響されない．また，σ^{M}_{ij0} と u^{M}_{i0} は定常項であり，温度分布が存在する場合は無視できない．Banks-Sills ら [7] や Munz [10] によって定常項の解法について論じられているが，本手法は応力拡大係数を求めることが目的であるので，その解を得る必要はなく言及しない．

2・2 特異性固有値 異方性異種材界面端部の特異性固有値 λ を求める手法は Hwu[2]によって Stroh formalism[3]を用いて求められている．式 (2)$_1$ は自由表面と界面での境界条件をマトリックス形式でまとめたもので，$\mathbf{q}^*$が自明解を持たないためには式 (2)$_2$ が必要となり，式 (2)$_2$ を解くことで，λ を求めることができる．$\mathbf{E}$ は6×6 のマトリックスであり，式(3) のように示すことができ，$\mathbf{E}_3$ は 3×3 のサブマトリックスである．α，β は図 1 に示す角度である．

$$\mathbf{E}_3 \mathbf{q}^* = 0, \quad \|\mathbf{E}_3\| = 0 \qquad (2)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{E}_4 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{N}}_A^{\lambda}(\alpha,0)\hat{\mathbf{N}}_B^{\lambda}(0,-\beta) \qquad (3)$$

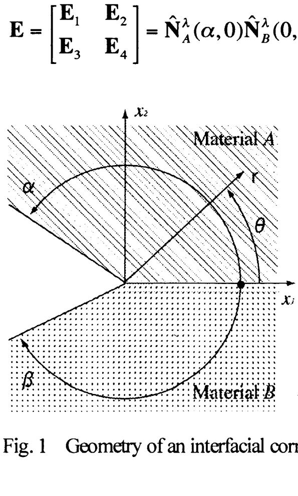

Fig. 1 Geometry of an interfacial corner.

$\hat{\mathbf{N}}_M^{\lambda}$（$M$=$A$,$B$）は6×6 のマトリックスであり，式 (4) と (5) のように示すことができる．$\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ は Stroh の固有ベクトルからなるマトリックスで，p_j は Stroh の固有値である．$\bar{(\ )}$は共役を，< >は j=1,2,3 の対角成分を持つマトリックスを示す．

$$\hat{\mathbf{N}}^{\lambda}(\theta_1,\theta_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left\langle \hat{p}_j^{\lambda}(\theta_1)\hat{p}_j^{-\lambda}(\theta_2) \right\rangle & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left\langle \bar{\hat{p}}_j^{\lambda}(\theta_1)\bar{\hat{p}}_j^{-\lambda}(\theta_2) \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T & \mathbf{A}^T \\ \bar{\mathbf{B}}^T & \bar{\mathbf{A}}^T \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$\hat{p}_j(\theta) = \cos\theta + p_j \sin\theta \qquad (5)$$

式 (2) から得られる λ の値は無限に存在する．しかし端部は特異点が存在し，端部近傍での応力場は特異項が支配的になるので，Re(λ-1)<0 となる項のみを考える．また変位は特異点でも有限な値を持つことから Re(λ)>0 となる．これらのことから，考慮すべき特異性固有値の範囲は 0<Re(λ)<1 となる．本手法では特異性固有値を以下の 6 通りの組み合わせに場合分けして取り扱う．

(A) 実数の値が 3 つ
$0 < \lambda_{\mathrm{I}} < \lambda_{\mathrm{II}} < \lambda_{\mathrm{III}} < 1$

(B) 実数の値が 2 つ
$0 < \lambda_{\mathrm{I}} < \lambda_{\mathrm{II}} < 1$

(C) 実数の値が 1 つ (3 重解)
$\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda_{\mathrm{II}} = \lambda_{\mathrm{III}} = 0.5$

(D) 実数の値が 1 つ，共役な複素数値が 2 つ
$\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda + i\varepsilon,\ \lambda_{\mathrm{II}} = \lambda - i\varepsilon,\ \lambda_{\mathrm{III}} = \lambda' \ (\lambda \le \lambda')$
$\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda',\ \lambda_{\mathrm{II}} = \lambda + i\varepsilon,\ \lambda_{\mathrm{III}} = \lambda - i\varepsilon \ (\lambda' < \lambda)$

(E) 共役な複素数値が 2 つ
$\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda + i\varepsilon,\ \lambda_{\mathrm{II}} = \lambda - i\varepsilon$

(F) 対数–指数の特異固有値

特異固有値が実数値のみ存在する領域と複素数が存在する領域の境界に現れる [11]．しかし，異なる理論展開が必要であり，多くの場合は(A-E)であるため，本手法では考慮していない．

特異性固有値に対応する固有関数は式 (6) に示す関係から得られる．$\mathbf{g}^M$ は g_i^M に対応するベクトルであり，$\mathbf{F}^M$ は応力関数の固有関数で式 (7) のような関係があり，f_{ij}^{mM}と対応しているベクトルである．

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{g}^M(\theta) \\ \mathbf{F}^M(\theta) \end{Bmatrix} = \hat{\mathbf{N}}_M^{\lambda}(\theta,0)\hat{\mathbf{N}}_B^{\lambda}(0,-\beta) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^* \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \qquad (6)$$

$$\boldsymbol{\phi}^M = C_m r^{\lambda_m} \mathbf{F}^M(\theta) \qquad (7)$$

$$\sigma_{i2}^M = \phi_{i,1},\ \sigma_{i1}^M = -\phi_{i,2}$$

ただし，特異性固有値が重解または3重解の場合には，対応する固有ベクトル **q***は重解の場合は 2 つ，3 重解の場合は3つ考慮する必要がある．

2・3 *H*-integral　Betti の相反定理を図 2 の異種材界面端部の熱応力問題に適用することで，*H*-integral を導く[8, 9]．Betti の相反定理を式（8）に示す．

$$\int_{\Gamma}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j ds + \int_{\Omega}(s_i u_i^* - s_i^* u_i)d\Omega = 0 \quad (8)$$

ここで，σ_{ij} と u_i は実際の応力と変位，s_i は物体力，n_j は反時計回りの積分経路Γに対する単位法線ベクトル，ΩはΓの囲む平面，σ_{ij}^*，u_i^* と s_i^* は補助場の応力，変位と物体力を示す．ここで，補助場とは図 2 の自由表面と接合部での平衡条件満たす任意の応力・変位場を示す．式（8）は熱弾性問題へは直接適用できない．そこで，図 3（a）の温度分布の存在する応力場を，図 3（b）のような温度分布の存在しない等価な応力場に置き換える[7, 10]．図3（b）の成分は式（9）（10）に示す．T_i は引張力を，ϑ は温度分布を，C_{ijks} は弾性係数を，α_{ks} は線膨張係数を示す．

$$\begin{aligned} \tilde{s}_i &= s_i - \beta_{ij}\vartheta_{,j} \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} + \beta_{ij}\vartheta \\ \tilde{T}_i &= T_i + \beta_{ij}\vartheta n_j \end{aligned} \quad (9)$$

$$\beta_{ij} = C_{ijks}\alpha_{ks} \quad (10)$$

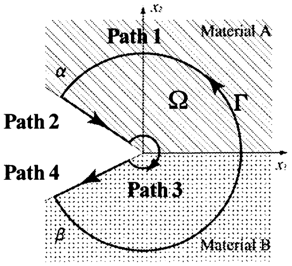

Fig. 2　Configuration of Betti reciprocal principle counter.

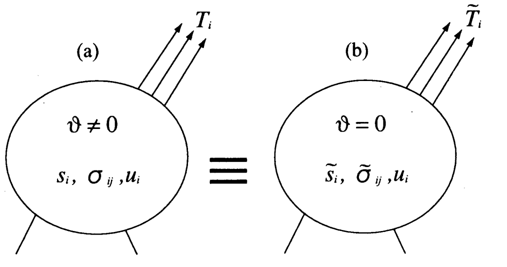

Fig. 3　Body force analogy : (a)the original body (b)the analogous body.

図 3 を適用することで，熱弾性問題で Betti の相反定理は式（11）のように示される．式（9）を代入すると，式（12）のように導くことができる．ただし，物体力は $s_i = 0$，補助応力場は温度分布が存在しないものとして，$\vartheta^* = 0$とする．

$$\int_{\Gamma}(\tilde{\sigma}_{ij}u_i^* - \tilde{\sigma}_{ij}^* u_i)n_j ds + \int_{\Omega}(\tilde{s}_i u_i^* - \tilde{s}_i^* u_i)d\Omega = 0 \quad (11)$$

$$\int_{\Gamma}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j ds + \int_{\Gamma}\beta_{ij}\vartheta u_i^* n_j ds - \int_{\Omega}\beta_{ij}\vartheta_{,j} u_i^* d\Omega = 0 \quad (12)$$

ここで式（12）の応力，変位は熱応力問題の解である．次に，式（12）の右辺第 2 項に Stokes の定理を用いて面積分に変換すると，次式のように示すことができる．

$$\int_{\Gamma}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j ds + \int_{\Omega}\beta_{ij}\vartheta\varepsilon_{ij}^* d\Omega = 0 \quad (13)$$

ここで Stroh formalism で用いられる平面ひずみ近似は $\varepsilon_{33}= 0$ とし，変位は x,y にのみ依存すると仮定するので，ひずみ–変位関係式は式（14）を用いている．

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & 2\varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & 2\varepsilon_{31} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \varepsilon_{33} &= 0 & 2\varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (14)$$

左辺の積分経路Γを図 2 の 4 つの経路に分割する．Γ=Γ$_1$+Γ$_2$+Γ$_3$+Γ$_4$ とすると，経路 2 と 4 は自由表面なので積分値は0となる．また，経路1の積分半径をr，経路 4 の半径を ε とすると，式（13）は次式のようになる．

$$\int_{-\beta}^{\alpha}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j \varepsilon d\theta = \int_{-\beta}^{\alpha}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j r d\theta + \int_{\Omega}\beta_{ij}\vartheta\varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (15)$$

補助場の応力と変位とひずみは Williams の固有値展開式より $\lambda^* = -\lambda$ も平衡条件を満たすので，式（16）を用いる．

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{M*} &= C_m^* r^{-\lambda_m - 1} f_{ij}^{mM*}(\theta) \\ u_i^{M*} &= C_m^* r^{-\lambda_m} g_i^{mM*}(\theta) \\ \varepsilon_{ij}^{M*} &= C_m^* r^{-\lambda_m - 1} h_{ij}^{mM*}(\theta) \end{aligned} \quad (16)$$

内側の積分半径を限りなく小さくとると，つまり ε→0 とすることで，式(15)の左辺は一定値となる．左辺を H とすることで，熱応力問題の *H*-integral は次式のように定義される．

$$H = \int_{-\beta}^{\alpha} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j r d\theta + \int_{\Omega} \beta_{ij} \vartheta \varepsilon_{ij}^* d\Omega \quad (17)$$

本手法では積分経路を円形にとっているが，どのような経路でも可能で経路独立性は保たれている．このとき，右辺の実応力と変位は FEM の結果を用いる．また，C_m^*を式（18）のように与えると $H=C_m$ となる．

$$\frac{1}{C_m^*} = \int_{-\beta}^{\alpha} (f_{ij}^m(\theta) g_i^{m*}(\theta) - f_{ij}^{m*}(\theta) g_i^m(\theta)) n_j d\theta \quad (18)$$

式（17）と（18）を用いて，3 通りの積分をすることで C_{I}, C_{II}, C_{III} を求めることができる．

式 (14) の平面ひずみ近似のもとで，固有関数 h_{ij}^{mM*} は変位の固有関数 g_i^{mM*}を微分することで式(19)のように得られる．

$$\begin{aligned}
h_{11}^{M*}(\theta) &= -\lambda \cos\theta g_1^{M*}(\theta) - \sin\theta \frac{\partial g_1^{M*}(\theta)}{\partial \theta} \\
h_{22}^{M*}(\theta) &= -\lambda \sin\theta g_2^{M*}(\theta) + \cos\theta \frac{\partial g_2^{M*}(\theta)}{\partial \theta} \\
2h_{32}^{M*}(\theta) &= -\lambda \sin\theta g_3^{M*}(\theta) + \cos\theta \frac{\partial g_3^{M*}(\theta)}{\partial \theta} \\
2h_{31}^{M*}(\theta) &= -\lambda \cos\theta g_3^{M*}(\theta) - \sin\theta \frac{\partial g_3^{M*}(\theta)}{\partial \theta} \\
2h_{12}^{M*}(\theta) &= -\lambda \cos\theta g_2^{M*}(\theta) - \sin\theta \frac{\partial g_2^{M*}(\theta)}{\partial \theta} \\
&\quad - \lambda \sin\theta g_1^{M*}(\theta) + \cos\theta \frac{\partial g_1^{M*}(\theta)}{\partial \theta}
\end{aligned} \quad (19)$$

また，式（15）の面積分は特異点を含むため，このままでは安定した数値積分は行えない．そこで，積分経路が円形の場合には，$d\Omega = rdrd\theta$ となることを利用して，半径方向には解析的に積分計算を行う．その結果，H-integral は式（20）のようになり，精度の良い数値解析を行うことが可能となった．

$$H = \int_{-\beta}^{\alpha} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j r d\theta + \frac{C_m^* r^{1-\lambda}}{1-\lambda} \int_{-\beta}^{\alpha} \vartheta \beta_{ij} h_{ij}^* d\theta \quad (20)$$

2・4 応力拡大係数の定義 現在，異種材接合端部の強度を評価するクライテリオンは統一されていない．H-integral より求められる係数 C_m(k=I,II,III) は，破壊力学における変形モードとは全く関係が無いため，応力拡大係数として用いるには不適切と考えられる．そこで，均質体中き裂と異種材界面き裂の定義と互換性のある応力拡大係数の定義として次式を提案する．

$$\mathbf{k} = \begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta=0}} \sqrt{2\pi r}\, l_k^{0.5-\mathrm{Re}[\lambda_1]} \mathbf{\Lambda}(\theta) \left\langle (r/l_k)^{0.5-\lambda_m} \right\rangle \mathbf{\Lambda}^{-1}(\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{\Lambda}(\theta) = [\mathbf{F}^{\mathrm{I}}(\theta),\ \mathbf{F}^{\mathrm{II}}(\theta),\ \mathbf{F}^{\mathrm{III}}(\theta)] \quad (22)$$

ここで $\mathbf{F}$ は式（6）で与えられ，λ_{I} は実部が最も小さな特異性固有値，l_k は代表長さ，＜＞は m=I,II,III の対角成分を持つマトリックスを示す．き裂で定義されている変形モードと対応しており，端部近傍の応力と変位の漸近解を再現できる．ただし，2 章 2 節で場合分けした（B）と（E）では特異性固有値が 2 つの場合では，便宜的に $\mathbf{F}^{\mathrm{III}}(0) = [0\ 0\ 1]^T$, $\lambda_{\mathrm{III}} = 1$ と置く必要がある．式 (21) を展開すると式 (23) のようになる．

$$\begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \sqrt{2\pi} [C_{\mathrm{I}} l_k^{\mathrm{Im}[\lambda_1]} \begin{Bmatrix} f_{12}^{\mathrm{I}} \\ f_{22}^{\mathrm{I}} \\ f_{32}^{\mathrm{I}} \end{Bmatrix} + C_{\mathrm{II}} l_k^{\lambda_{\mathrm{II}}-\mathrm{Re}[\lambda_1]} \begin{Bmatrix} f_{12}^{\mathrm{II}} \\ f_{22}^{\mathrm{II}} \\ f_{32}^{\mathrm{II}} \end{Bmatrix} + C_{\mathrm{III}} l_k^{\lambda_{\mathrm{III}}-\mathrm{Re}[\lambda_1]} \begin{Bmatrix} f_{12}^{\mathrm{III}} \\ f_{22}^{\mathrm{III}} \\ f_{32}^{\mathrm{III}} \end{Bmatrix}]_{\theta=0} \quad (23)$$

また，界面上の応力は次式のようになる．

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} = \frac{l_k^{\mathrm{Re}[\lambda_1]-1}}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{\Lambda}(0) \left\langle (r/l_k)^{\lambda_m-1} \right\rangle \mathbf{\Lambda}^{-1}(0) \begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{120} \\ \sigma_{220} \\ \sigma_{320} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

これより，定義した応力拡大係数は，異種材接合界面端部近傍の応力成分のモードを定量的に表現できていることがわかる．異種材界面き裂の場合には，特異性固有値は $0.5 \pm i\varepsilon$, 0.5 の 3 つとなり，このとき式 (21) は Hwu によって提案された応力拡大係数の式 (25) になる [10]．

$$\begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta=0}} \sqrt{2\pi r}\, \mathbf{\Lambda}(\theta) \left\langle (r/l_k)^{-i\varepsilon_m} \right\rangle \mathbf{\Lambda}^{-1}(\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここで，ε_m (m = 1,2,3)は，異方性異種材界面き裂のバイマテリアル係数である．均質体中のき裂では特異性固有値は 0.5 になり，このとき式 (21) は式 (26) のようになる．

$$\begin{Bmatrix} K_{\mathrm{II}} \\ K_{\mathrm{I}} \\ K_{\mathrm{III}} \end{Bmatrix} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \theta=0}} \sqrt{2\pi r} \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

3. 数値解析結果

3・1 特異性固有値例 等方性均質体端部と異方性異種材界面端部の角度を様々に変えた場合の特異性固有値を式 (2) より求めた．等方性均質体の特異性固有値は材料定数に依らず，γ （$=\alpha+\beta$）の値を変えた時の結果を図 4 に示す．この結果は Hwu によって得られた結果 [2] と一致している．また，異方性材料の組み合わせとして直交異方性材料の Aragonite と単斜晶材料の GSO を用いた．それぞれの材料定数を

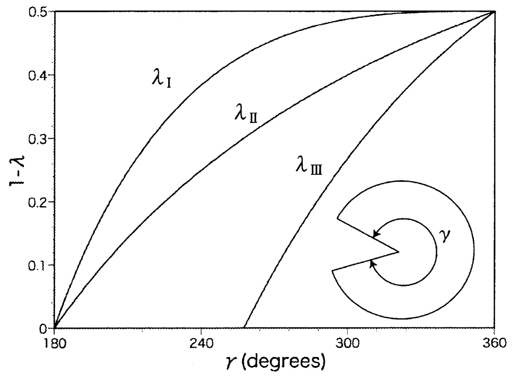

Fig. 4 Singular order for the corner in an isotropic homogeneous material.

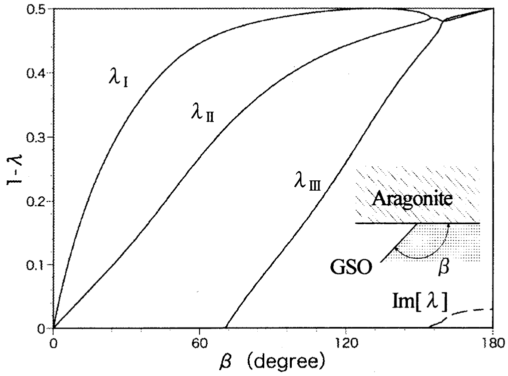

Fig. 5 Singular order for an interfacial corner between anisotropic bimaterials.

表 1 に示す[13, 14]．Aragonite の角度αは 180° に固定したまま, GSO の角度βを変えた結果を図 5 に示す. この結果は弾性定数によって決定され, 線膨張係数には依存していない.

図 4 において$180° < \gamma < 257°$の範囲では実数の特異性固有値2つで, 2 章2 節での (B) にあたる. $257° \le \gamma < 360°$ では (A), $\gamma = 360°$ では (C) となり, 均質体中のき裂問題に相当する. 図5 において, $0° < \beta < 70°$ では (B), $70° \le \beta < 154°$ では (A), $\beta \approx 154°$ では (F) にあたり, 特異性固有値は重解を持ち対数–指数オーダーの項を考慮しなければならない. $154° < \beta < 180°$ では (D) となり, 実部に重解となる実線の値を虚部に破線の値を持つ, 共役な複素数の特異性固有値になる. それに加えて, 重解でない値は実数の特異性固有値となる. $\beta = 180°$ は界面き裂問題に相当する. これらの例では (E) は現れていないが, 両材料の角度が大きく開いた場合に現れる.

3・2 解析例 1 図 6 に示す界面端部を有する構造の接合材に, –20℃の等温冷却の温度変化を加えた場合の応力拡大係数を解析した. 材料には特異性固有値の例で用いた Aragonite と GSO を用い, その材料定数は表 1 に示す値を用いた. 界面端部の形状として, Aragonite の角度はα= 180°, GSO の角度はβ= 125.26° である. また, 有限要素解析は 8358 節点, 2782 要素, 最小メッシュサイズは$m/a \cong 0.0001$程度として界面端部近傍の要素分割を細かくし, 式 (14) の一般化平面ひずみ近似に従って行った.

特異性固有値の値はλ_{I}=0.501, λ_{II}=0.551, λ_{III}=0.763 となった. また, 積分半径 r を様々に変えた場合の応力拡大係数の解析結果を表 2 に示す. ただし, 代表長さ l_k は$1\mu m$としており, 応力拡大係数は最も特異性の強い固有値に関連した次元を持つ. 得られた応力

Table 1 Elastic stiffness (GPa) and CTE. ($\times 10^{-6}$/ ℃)

		Aragonite	GSO
Elastic Stiffness	C_{11}	159	223
	C_{12}	36.6	108
	C_{13}	2	98.5
	C_{15}	0	8.4
	C_{22}	87	150
	C_{23}	15.9	102
	C_{25}	0	33.3
	C_{33}	85	251
	C_{35}	0	-6
	C_{44}	41.3	78.8
	C_{46}	0	6.6
	C_{55}	25.6	68.6
	C_{66}	42.7	82.7
CTE	α_{11}	35.0	4.4
	α_{22}	17.0	14.0
	α_{33}	10.0	6.8
	α_{31}	0	-1.4

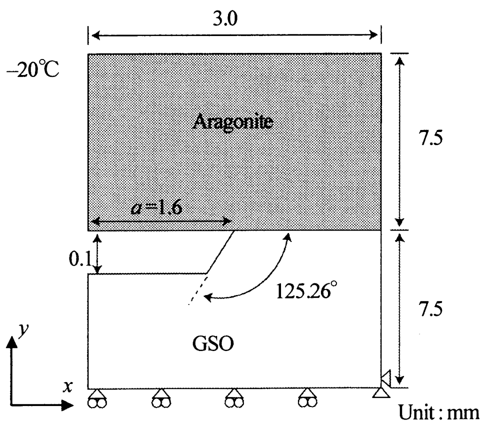

Fig. 6 The interfacial corner between anisotropic bimaterials.(Uniform change of temperature, –20℃)

拡大係数から式 (24) を用いて界面上の応力の漸近解を計算し，FEM 結果と比較したものを図 7・8 に示す．応力の漸近解は最も平均的な値である積分半径 r = 0.5mm で得られた応力拡大係数を用いており，熱による定常項は非常に小さいと判断し無視とした．σ_{xy} と σ_{yz} に対して σ_{yy} は大きく異なる挙動を示すので，図 7 に σ_{xy} と σ_{yz} を図 8 に σ_{yy} を分けて示す．

表 2 で応力拡大係数はほぼ一定の値をとっており，*H*-integral の経路独立性が保たれていることがわかる．積分半径は小さくとりすぎると，FEM 結果が特異点の影響で乱れるので応力拡大係数は正確に求めることができない．図 7，8 で応力拡大係数より得た応力の漸近解と FEM 結果がほぼ一致することから，応力拡大係数は正しい値であると考えられる．図 8 において，σ_{yy} は他の応力成分に比べて漸近解との大きなずれが生じている．特異点付近では FEM 解析結果が乱れることが原因と考えられ，r >0.01mm におけるずれは，特異性応力項が支配的でなくなり漸近解は追従しなくなったと考えられる．それ以外の部分では良く一致しており，応力拡大係数は十分な精度があると判断した．

Table 2 Stress intensity factors. (Fig.6)

r	K_{I}	K_{II}	K_{III}
mm		MPa・mm$^{0.499}$	
0.001	−3.678	13.95	6.920
0.005	−3.694	14.02	6.948
0.01	−3.747	13.99	6.937
0.03	−3.669	14.01	6.951
0.05	−3.688	14.00	6.947
0.08	−3.708	14.00	6.940

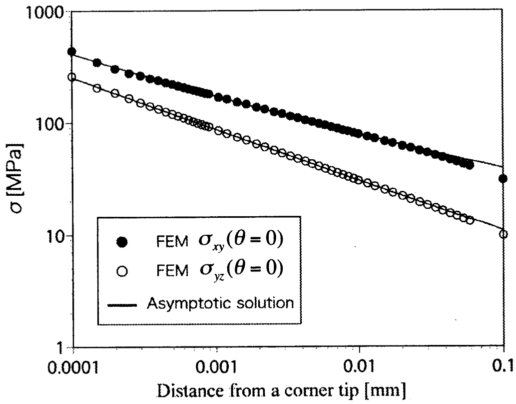

Fig. 7 Stress distribution along the bimaterial interface. (Fig.6 σ_{xy}, σ_{yz})

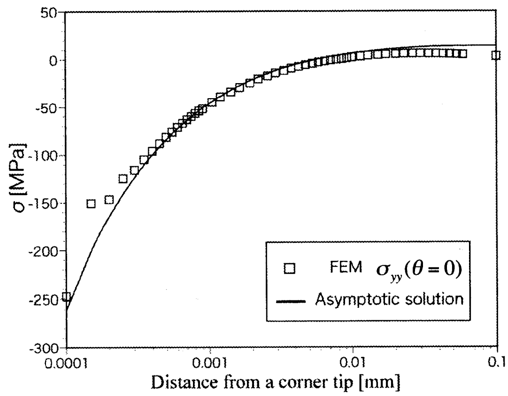

Fig. 8 Stress distribution along the bimaterial interface. (Fig.6 σ_{yy})

3・3 解析例 2 図 9 に示す界面端部を有する構造の接合材に，20℃の等温冷却の温度変化を加え，さらに 1MPa の引張り荷重を加えた場合の応力拡大係数を解析した．材料の組合わせは解析例 1 と同じで，GSO 側の界面端部の形状を β=160° とした．特異性固有値，スカラーの係数，応力拡大係数の結果を表 3 に示す．固有関数はそれぞれ $f_{12}^{\mathrm{I}}(0)=1$ $\mathrm{Re}[f_{22}^{\mathrm{II}}(0)]=1$ という基準で規格化していおり，固有関数の規格化基準が変わるとスカラーの係数の値も変わるが，応力拡大係数は変化しない．代表長さ l_k は解析例 1 と同様に $1\mu m$ としている．また，応力拡大係数から式 (24) を用いて得た界面上の応力の漸近解と FEM 結果を比較したものを図 10 に示す．

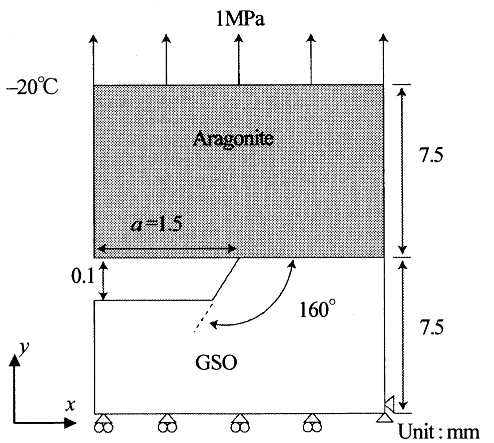

Fig. 9 The interfacial corner between anisotropic bimaterials.(Uniform tension and change of temperature)

図 10 において応力の漸近解は FEM 結果と一致しており，応力拡大係数は正しい値であると言える．特異項の II と III は特異性固有値，固有関数，スカラー係数が互いに共役な複素数であり，スカラー係数を界面端部のクライテリオンとして扱いづらく，図 10 の応力分布からわかる変形モードとの対応はない．それに対し，今回提案する応力拡大係数は図 10 での開口，面内せん断，面外せん断の比を表しており，直感的に理解しやすい．

Table 3 Eigenvalues, Scalar coefficients, Stress intensity factors. (Fig.9) $l_k = 1\mu m$

	I	II	III
λ	0.5166	0.5254+0.0198i	0.5254–0.0198i
C	0.8207	1.955+8.987i	1.955–8.987i
K	12.04	25.53	9.099

Unit : $C_m \cdots \mathrm{MPa \cdot mm^{1-\lambda_k}}$, K_{I} K_{II} $K_{\mathrm{III}} \cdots \mathrm{MPa \cdot mm^{0.483}}$

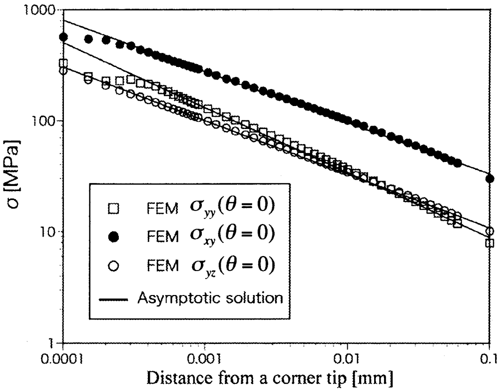

Fig. 10　Stress distribution along the bimaterial interface. (Fig.9 σ_{yy}, σ_{xy}, σ_{yz})

3・4　解析例 3　図 11 に示す接合界面にき裂を有する構造材に，+20℃の等温加熱を加えた場合の応力拡大係数を解析した．材料定数は表 1 に示す通りである．図 12 に H-integral の積分半径を，さまざまに変えた場合に得られた応力拡大係数を示す．r は積分半径，m は FEM の最小メッシュサイズで，m=0.0001mm である．応力拡大係数の参照解として，Nagai ら [15] により得られた熱応力下での異方性異種材界面き裂の応力拡大係数解析の手法により得られた解と比較している．

解析結果は，特異性固有値が $\lambda_{\mathrm{I}}=0.5+0.0366i$, $\lambda_{\mathrm{II}}=0.5-0.0366i$, $\lambda_{\mathrm{III}}=0.5$ となり，図 12 の応力拡大係数は代表長さを解析例 1 と同様に l_k=1μm として計算された結果である．積分半径は特異点からメッシュ 4~5 個分外にとれば，精度の高い結果が得られていることがわかる．積分半径が非常に小さい場合，FEM の結果が特異点の影響で正確に求まっておらず，その解を利用して得られる応力拡大係数の解析結果は精度が低下すると考えられる．また，本手法は界面き裂問題も解析でき，式 (21) の応力拡大係数は界面き裂で定義された式 (25) を含むより一般的な定義であることが確認できた．

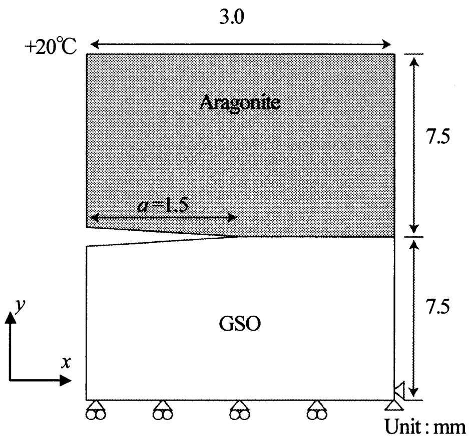

Fig. 11　The interfacial crack between anisotropic bimaterials.(Uniform change of temperature,+20℃)

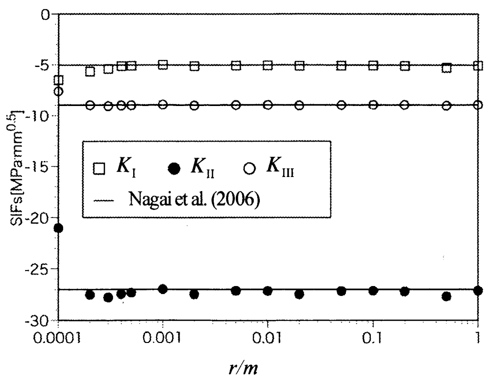

Fig. 12　Stress intensity factors calculated from different H-integral radii.

4. 結言

界面端部の応力・変位場を解析する上で重要なH-integralを異方性材料の熱応力問題に拡張し，異方性異種材界面端部の特異応力場解析手法を開発した．また，界面端部の特異性応力場の大きさを示す指標として，新しい応力拡大係数の定義を提案した．均質体中のき裂，界面き裂の応力拡大係数の定義と互換性があり，変形モードの比を定性的に捉えており，応力の漸近解を得ることができる．開発した手法を用いて，異方性材料により構成されるさまざまな界面端部形状での応力拡大係数を解析した．得られた応力拡大係数より求めた漸近応力場はFEMの結果と一致しており，特異応力場を十分な精度で解析できていることが確認できた．

文献

(1) Carpenter W. C., Calculation of fracture mechanics parameters for a general corner, *International Journal of fracture*, Vol. 24 (1984), pp. 45-58.
(2) Hwu C., Omiya M., Kishimoto K., A key matrix N for the stress singularity of anisotropic elastic composite wedges, *JSME International Journal Series* A, Vol. 46 (2003), pp.40-50.
(3) Ting T. C. T., Anisotropic Elasticity: Theory and Applications, *Oxford University Press,* (1996), pp.134-263.
(4) Babuska I., Miller A., The post–processing approach in the finite element method—Part 2: the calculation of stress intensity factors, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20 (1984), pp. 1111-1129.
(5) Sinclair G. B., Okajima M., Griffin J. H., Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp corners in elastic plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20 (1984), pp.999-1008.
(6) Banks-Sills L., A conservative integral for determining stress intensity factors of a bimaterial strip, *International Journal of Fracture,* Vol. 86 (1997), pp. 385-398.
(7) Banks-Sills L., Ishbir C., A conservative integral for bimaterial notches subjected to thermal stresses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 60 (2004), pp. 1075-1102.
(8) Labossiere P. E. W., Dunn M. L., Stress intensities at interface corners in anisotropic bimaterials, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 62 (1999), pp. 555-575.
(9) Hwu C. and Kuo T. L., A unified definition for stress intensity factors of interface corners and cracks, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44 (2007), pp. 6340-6359.
(10) Munz D., Fett T., Yang Y. Y., The regular stress term in bonded dissimilar materials after a change in temperature, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 44 (1993), pp. 185-194.
(11) Dempsey J. P., Power-logarithmic stress singularities at bi-material corners and interface cracks, *Journal adhesion Science and Technology*, Vol. 9 (1995), pp. 253-265.
(12) Hwu C., Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 45 (1993), pp. 89-97.
(13) Qian W., Sun C. T., Methods for stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic materials, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35 (1998), pp. 3317-3330.
(14) Kurashige K. et al., Mechanical properties of a Gd_2SiO_5 single crystal, *Journal of applied physics*, Vol. 36 (1997), pp. 2242-2246.
(15) Nagai, M., Ikeda T. and Miyazaki, N., Stress Intensity Factors Analyses of Three-Dimensional Interface Crack between Anisotropic Dissimilar Materials, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers (Series A)*, Vol. 72, No.724 (2006), pp. 1992-1999.