

Reprinted from
JOURNAL OF
THE SOCIETY OF MATERIALS SCIENCE
JAPAN
Vol. 61, No. 6, pp. 522 ~ 529
June 2012

材 料 別 冊
第 61 卷 第 6 号
522 ~ 529 ページ
平成 24 年 6 月

異方性異種圧電材料接合角部近傍の特異応力場解析[†]

阿 部 光 利^{*} 池 田 徹^{**} 宮 崎 則 幸^{**}

Stress Singularity Analysis around an Interfacial Corner
between Anisotropic Piezoelectric Multi-Materials

by

Mitsutoshi ABE^{*}, Toru IKEDA^{**} and Noriyuki MIYAZAKI^{**}

異方性異種圧電材料接合角部近傍の特異応力場解析[†]

阿 部 光 利* 池 田 徹** 宮 崎 則 幸**

Stress Singularity Analysis around an Interfacial Corner between Anisotropic Piezoelectric Multi-Materials

by

Mitsutoshi ABE*, Toru IKEDA** and Noriyuki MIYAZAKI**

Asymptotic solutions around an interfacial corner can be obtained by the combination of the Stroh formalism and the Williams eigenfunction method. The H -integral method, which is derived from Betti reciprocal principle, is useful for analyzing the stress intensity factors (SIFs) of cracks and corners. By expanding these theories for an interfacial corner between anisotropic piezoelectric multi-materials, we developed the modified H -integral method. This method has high generality that can deal a jointed corner with various numbers of materials and several boundary conditions on the corner surfaces. We proposed a new definition of SIFs of an interfacial corner between anisotropic piezoelectric multi-materials, which is compatible with the definitions of SIFs of a crack in a homogeneous material and an interfacial crack. The accuracy of obtained SIFs was confirmed by comparing the asymptotic solutions obtained from the SIFs with the stress field directly obtained by the finite element method (FEM). And we proposed a numerical method for degenerate materials, which cause numerical problems in the Stroh formalism.

Key words : Materials, Interfacial corner, Multi-materials, Stroh formalism, H -integral, Stress singularity, Stress intensity factors, Finite element method, Degenerate materials

1 緒 言

圧電材料は、機械的変形と電荷の間に固有の連成作用(圧電効果)を有する材料で、その特殊な性質を利用して例えばセンサーやアクチュエータ等工業界で幅広く利用されている。これらに用いられる圧電材料は圧電単結晶や圧電セラミックスといった異方性材料が多く、また、多種多様な材料を積層するため、接合角部を有する構造のものが多い。このような接合角部は、MEMSや電子実装部をはじめとした実際の様々な構造物に存在すると考えられるが、異種材接合角部では弾性定数、圧電定数、誘電率などの材料定数の違いにより応力集中が生じ、破壊の起点となることが信頼性上大きな問題となっている。さらに、圧電材料であっても材料によって線膨張係数が異なるため、高温で接合して常温に戻した段階ですでに熱応力が発生しており、機械的、電気的負荷とともに熱応力も考慮する必要がある場合がほとんどであると考えられる。そのため、熱応力問題にも適用可能な異種圧電材接合角部での強度評価手法の確立が重要となる。

これまでに、均質体中き裂や異種材界面き裂周りの特異応力場に関しては多くの研究が行われている。^{1)~6)} Hwu^{7), 8)}らはStroh formalismを圧電問題に拡張し、一般的な異方性異種接合材料で構成される端部での特異性固有値を求める手法を示し、界面き裂と均質体中き裂の定義と互換性のある応力拡大係数の定義を提唱した。また、野村ら^{9), 10)}はHwuらとは別の新たな応力拡大係数

の定義を提唱し、 H -integralを用いてそれらを求める手法を開発した。しかし、圧電効果を考慮した異種材界面端部問題の解析手法はまだ発展段階にあり、特定の材料数や接合構造、角部表面の境界条件に限られるなど一般性に欠けている。

そこで本研究では、野村ら^{9), 10)}によって確立された熱応力下での異方性異種材界面角部の応力拡大係数解析手法を圧電問題用に拡張し、上記のような制限を取り払った一般性の高い解析手法を開発した。また、野村ら^{9), 10)}により新たに定義された応力拡大係数は、それらの値が変形モードに対応し、端部近傍の応力・変位場の漸近解を表現することができることから、これを圧電問題に拡張した、新たな応力拡大係数の定義を提唱する。さらに、Stroh formalismを用いる際に数学的な問題が生じる退化材料についても、機械的弾性問題の理論を圧電問題用に拡張する方法を示す。以下にその内容を報告する。

2 解 析 理 論

2・1 圧電基本式

直交座標系 x_i ($i = 1, 2, 3$) において、ひずみ-変位関係式は次式で示される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1)$$

ここで、 ε_{ij} はひずみテンソル、 u_i は変位ベクトルを表す。また、圧電材料の構成式および平衡方程式は次式で示される。

[†] 原稿受理 平成 23 年 8 月 11 日 Received Aug. 11, 2011 ©2012 The Society of Materials Science, Japan

* 京都大学大学院工学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田本町, Graduate School of Eng., Kyoto Univ., Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501

** 正 会 員 京都大学大学院工学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田本町, Graduate School of Eng., Kyoto Univ., Sakyo-ku, Kyoto, 606-8501

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k \\ D_j = e_{jkl} \varepsilon_{kl} + \omega_{jk}^E E_k \\ \sigma_{ij,j} = 0 \\ D_{j,j} = 0 \end{cases} \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \quad (2)$$

ここで、 σ_{ij} は応力テンソル、 D_i は電気変位ベクトル、 C_{ijkl}^E は弾性スティッフネステンソル、 e_{kij} は圧電定数テンソル、 E_i は電界ベクトル、 ω_{jk}^E は誘電率テンソルを表す。ここで、次式で示すようにテンソル表記を拡張する。⁸⁾

$$\begin{aligned} D_j &= \sigma_{4,j}, \quad -E_j = u_{4,j} = 2\varepsilon_{4,j}, \quad (j=1,2,3) \\ C_{ijkl} &= C_{ijkl}^E, \quad (i,j,k,l=1,2,3) \\ C_{ij4l} &= e_{ijl}, \quad (i,j,l=1,2,3) \\ C_{4jkl} &= e_{jkl}, \quad (j,k,l=1,2,3) \\ C_{4j4l} &= -\omega_{jl}^E, \quad (j,l=1,2,3) \end{aligned} \quad (3)$$

これにより式 (1), (2) は以下のように書き改めることができる。

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (i,j,k,l=1,2,3,4) \\ \sigma_{ij,j} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

2・2 特異応力場と特異電気変位場

Fig. 1 に示すような異種材界面角部に局所座標系 (x_1, x_2) および極座標系 (r, θ) を設定すると、角部近傍の応力、電気変位、変位および電気ポテンシャルは Williams の固有値展開法より次式で表される。¹¹⁾

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^k &= \sum_{m=1}^{IV} C_m r^{\lambda_m-1} f_{ij}^{mk}(\theta) + \sigma_{ij0}^k(\theta) \\ u_i^k &= \sum_{m=1}^{IV} C_m r^{\lambda_m} g_i^{mk}(\theta) + u_{i0}^k(r, \theta) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 C_m ($m = \text{I, II, III, IV}$) はスカラー係数と呼ばれる定数値であり、後述する H -integral によって求められる。(スティッフネスとは全く別の定数であるので、注意が必要である。) また、 λ_m は特異性固有値、 $f_{ij}^{mk}(\theta)$ 、 $g_i^{mk}(\theta)$ は特異性固有値に対応する固有関数で、これらは材料 ($k = 1, 2, \dots, n$) の材料定数と開き角から決定され、負荷条件には依らない。また、 σ_{ij0}^k と u_{i0}^k は熱による定常項¹²⁾であるが、この項を求めることが本研究の目的ではないので詳しくは言及しない。

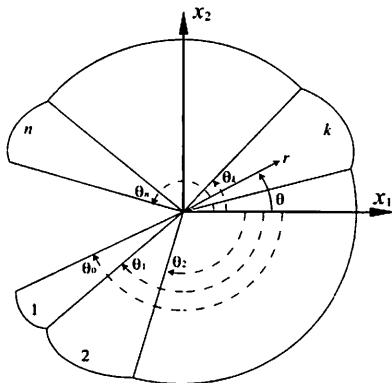


Fig. 1 Geometry of n -multibonded materials.

2・3 特異性固有値

特異性固有値を求める手法は Hwu ら⁸⁾により導かれている。Fig. 1 に示す様な異なる n 個の材料で構成される角部を考えると、 $\theta = \theta_0, \theta_n$ の表面では、bonded, free-free, fixed-fixed, free-fixed または fixed-free という条件が考えられる (ここで、free とは自由表面かつ絶縁表面、fixed とは固定表面かつ接地表面という条件を表す)。これらの条件と界面での条件をマトリクス形式でまとめると以下のような式になり、これらの式を解くことにより特異性固有値を求めることができる。

$$\begin{aligned} \text{bonded: } & \|E - I\| = 0, \quad [E - I] \begin{Bmatrix} p^* \\ q^* \end{Bmatrix} = 0 \\ \text{free-free: } & \|E_3\| = 0, \quad E_3 p^* = 0 \\ \text{fixed-fixed: } & \|E_2\| = 0, \quad E_2 q^* = 0 \\ \text{free-fixed: } & \|E_1\| = 0, \quad E_1 p^* = 0 \\ \text{fixed-free: } & \|E_4\| = 0, \quad E_4 q^* = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 E および E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) は以下の式で定義されるマトリクスである。

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^n \hat{N}_j^{\lambda}(\theta_{j-1}, \theta_j) \quad (7)$$

また、 \hat{N}^{λ} は 8×8 のマトリクスであり、Stroh の固有値 p_α 、固有ベクトル A, B を用いて以下のように示される。

$$\begin{aligned} \hat{N}^{\lambda}(\theta_1, \theta_2) &= \begin{bmatrix} A & A \\ B & B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \langle \hat{\mu}_1^{\lambda}(\theta_1) \hat{\mu}_1^{-\lambda}(\theta_2) \rangle & 0 \\ 0 & \langle \hat{\mu}_2^{\lambda}(\theta_1) \hat{\mu}_2^{-\lambda}(\theta_2) \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T & A^T \\ B^T & A^T \end{bmatrix} \quad (8) \\ \hat{\mu}_\alpha(\theta) &= \cos(\theta) + p_\alpha \sin(\theta), \quad \langle \hat{\mu}_\alpha(\theta) \rangle = \text{diag}[\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\mu}_3, \hat{\mu}_4] \end{aligned}$$

ここで、上付きバーは複素共役を示す。式 (6) から得られる λ は無限に存在するが、端部には特異点が存在し端部近傍での応力場は特異項が支配的となるので $\text{Re}[\lambda-1] < 0$ である必要がある。また、変位は特異点でも有限な値を持つことから $\text{Re}[\lambda] > 0$ である必要がある。これらより、本研究では $0 < \text{Re}[\lambda] < 1$ の固有値のみに注目する。

また、特異性固有値に対応する固有関数は式 (9) に示す関係から得られる。

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} g^{mk}(\theta) \\ F^{mk}(\theta) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{N}_k^{\lambda_k}(\theta, \theta_k) \prod_{i=k+1}^n \hat{N}_i^{\lambda_i}(\theta_{i-1}, \theta_i) \begin{Bmatrix} p^* \\ q^* \end{Bmatrix} \\ \hat{N}_k^{\lambda_k}(\theta, \theta_k) \begin{Bmatrix} p^* \\ q^* \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} k=1, 2, \dots, n-1 \\ k=n \end{matrix} \end{cases} \quad (n > 2) \quad (9)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \text{free-free: } & q^* = 0, \quad \text{fixed-fixed: } p^* = 0 \\ \text{free-fixed: } & q^* = 0, \quad \text{fixed-free: } p^* = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

である。ベクトル g^{mk} はテンソル g_i^{mk} に対応しており、ベクトル F^{mk} は応力・電気変位関数の固有関数で式 (11), (12) のような関係があり、 f_{ij}^{mk} と対応している。

$$\phi_i^k = C_m r^{\lambda_m} F_i^{mk}(\theta) \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{i1} &= -\phi_{i,2}, & \sigma_{i2} &= \phi_{i,1} \\ D_1 &= \sigma_{41} = -\phi_{4,2}, & D_2 &= \sigma_{42} = \phi_{4,1}\end{aligned}\quad (12)$$

2・4 H-integral

H -integral を用いることで前述したスカラー係数 C_m を求めることができる。ここでは、Betti の相反定理を Fig. 2 の異種圧電材接合角部に適用することで、 H -integral を導く。^{9), 10)} まずは角部表面の境界条件が free-free である場合について示す。

物体力を考慮した場合の Betti の相反定理は式 (13) で表される。

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} (s_i u_i^* - s_i^* u_i) d\Omega = 0 \quad (13)$$

ここで、 σ_{ij} と u_i は解析対象の応力・電気変位と変位・電気ポテンシャル、 s_i は物体力、 n_j は反時計回りの積分経路 Γ に対する単位法線ベクトル、 Ω は Γ の囲む平面、 σ_{ij}^* 、 u_i^* と s_i^* は補助場の応力・電気変位、変位・電気ポテンシャルと物体力を示す。補助場は解析対象と同じ構成式と平衡方程式を満たせば良い。この場合は角部表面の境界条件が free-free なので、補助場もこのように選択する。式 (13) は直接、熱応力問題に適用することはできない。そこで、Fig. 3 (a) の温度分布の存在する応力場を、Fig. 3 (b) のような温度分布の存在しない等価な応力場に置き換える。¹³⁾ Fig. 3 (b) の成分は式 (14)、(15) に示す。

$$\tilde{s}_i = s_i - \beta_{ij} \theta_{,j} \quad (14)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \beta_{ij} \theta$$

$$\begin{aligned}\tilde{T}_i &= T_i + \beta_{ij} \theta_{,j} \\ \beta_{ij} &= C_{ijk} \alpha_{k,3}\end{aligned}\quad (15)$$

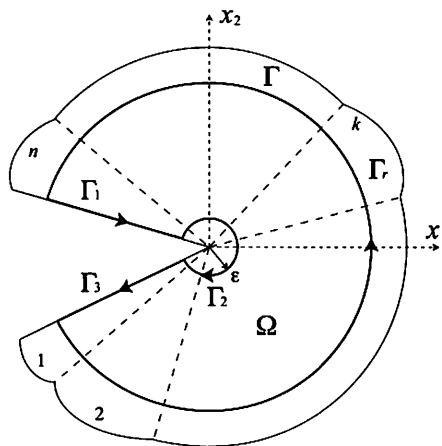


Fig. 2 Configuration of Betti reciprocal principle contour.

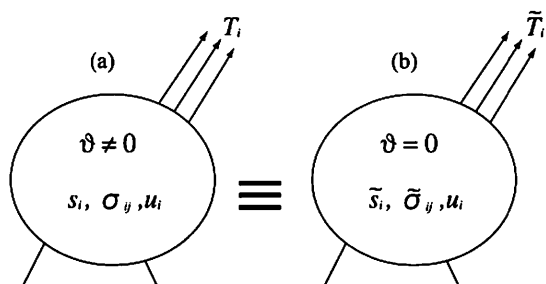


Fig. 3 Body force analogy : (a) the original body, (b) the analogous body.

ここで、 T_i は引張力を、 θ は温度分布を、 C_{ijk} は拡張された弾性スティッフネステンソルを、 α_{ks} は線膨張係数 (CTE) を示す。Fig. 3 を適用することで、熱応力問題で Betti の相反定理は式 (16) のように示される。

$$\int_{\Gamma} (\tilde{\sigma}_{ij} u_i^* - \tilde{\sigma}_{ij}^* u_i) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} (\tilde{s}_i u_i^* - \tilde{s}_i^* u_i) d\Omega = 0 \quad (16)$$

また、式 (14) を代入すると、式 (17) のように導くことができる。ただし、物体力は $s_i = s_i^* = 0$ 、補助応力場は温度分布が存在しないものとして、 $\theta^* = 0$ とする。

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \beta_{ij} \theta_{,j} d\Omega = 0 \quad (17)$$

ここで、拡張された Stroh formalism では 2 次元状態を一般化平面ひずみかつ短絡 ($\epsilon_{33} = 0, E_3 = 0$) 近似を仮定している。次に、左辺の積分経路 Γ を Fig. 2 の 4 つの経路に分割する。 $\Gamma = \Gamma_r + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ とすると、 Γ_1 と Γ_3 は自由表面かつ絶縁表面なので積分値は 0 となる。また、 Γ_r の積分半径を r とし、 Γ_2 と反対向きであり Γ_r と同じ法線ベクトルを持つ積分経路を Γ_c とすると、式 (17) は次式のようになる。

$$\int_{\Gamma_c} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j d\Gamma = \quad (18)$$

$$\int_{\Gamma_c} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \beta_{ij} \theta_{,j} d\Omega$$

内側の積分半径を限りなく小さくとると、つまり $\epsilon \rightarrow 0$ とすることで、式 (18) の左辺は一定値となる。左辺を H とすることで、圧電問題において熱応力の影響も考慮した H -integral は次式のように定義される。

$$H = \int_{\Gamma_c} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} \beta_{ij} \theta_{,j} d\Omega \quad (19)$$

このとき、右辺の実応力・電気変位と変位・電気ポテンシャルは FEM の結果を移動最小自乗法により近似した値を用いる。また、補助場の応力・電気変位と変位・電気ポテンシャルは Williams の固有値展開式より $\lambda^* = -\lambda$ も平衡条件を満たすので、式 (20) を用いる。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^* &= C_m^* r^{-\lambda_m-1} f_{ij}^{m*}(\theta) \\ u_i^* &= C_m^* r^{-\lambda_m} g_i^{m*}(\theta) \\ \frac{1}{C_m^*} &= \int_{\theta_0}^{\theta_n} (f_{ij}^m(\theta) g_i^{m*}(\theta) - f_{ij}^{m*}(\theta) g_i^m(\theta)) n_j d\theta\end{aligned}\quad (20)$$

このように C_m^* を与えると $H = C_m$ となり、結局 H -integral を計算することでスカラー係数 C_m が求まる。

これで、角部表面の境界条件が free-free である場合について H -integral を導くことができた。ここからはその他の境界条件の場合について考えるが、結局どの境界条件であっても式 (19) と同じ式で表現できる。

例えば角部表面の境界条件が free-fixed である場合は、補助場の境界条件も free-fixed と選択すると、 Γ_1 と Γ_3 での積分値は 0 となり、同じ結果となることがわかる。同様に、fixed-free, fixed-fixed の場合についても補助場の境界条件を解析対象と等しく選択することで式 (19) と等しくなる。一方で bonded の場合は、 $\theta_0 = \theta_n$ であることより、 Γ_1 と Γ_3 の経路が等しくなり、かつ法線ベクトルが逆向きとなるので、互いが打ち消し合うことで Γ_1 と Γ_3 での積分値の和が 0 となり、結局式 (19) が導かれる。

2・5 応力拡大係数の定義

現在、圧電体の特異応力場の強度を評価する破壊力学

パラメータは統一されていない。線形材料を扱う際には強度評価の指標として一般的な応力拡大係数を用いることが有効であると考えられるが、 H -integral より求まるスカラー係数 C_m は、破壊力学における変形モードとは必ずしも対応しないため、応力拡大係数として用いるには不適切であると考えられる。Hwu ら⁸⁾により均質体中のき裂や異種材界面き裂の定義と互換性のある応力拡大係数が次式で提案されている。

$$\begin{Bmatrix} K_{II}^H \\ K_I^H \\ K_{III}^H \\ K_{IV}^H \end{Bmatrix} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\pi} r^{1-\text{Re}(\lambda_c)} \Lambda(\theta) \left\langle (r/l_k)^{-\lambda_c} \right\rangle \Lambda^{-1}(\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\Lambda(\theta) = [\mathbf{F}^I(\theta) \quad \mathbf{F}^{II}(\theta) \quad \mathbf{F}^{III}(\theta) \quad \mathbf{F}^{IV}(\theta)]$$

この定義では最も支配的な特異性固有値 λ_c のみを考慮しており物理的な意味が明確になるが、それより大きな値の特異性固有値は考慮されていない。ここで、 \mathbf{F} は式 (9) で与えられ、 l_k は代表長さ、 $\langle \cdot \rangle$ は $m = \text{I, II, III, IV}$ の対角成分を持つマトリクスを示す。式 (21) は Mode I ~ III までの機械的な応力拡大係数に、Mode IV の電気的な応力拡大係数を付け加えた形となっている。

一方、我々は野村ら^{9), 10)}により新たに定義された応力拡大係数を圧電問題に拡張し、より特異性の小さい項の影響も考慮に入れた応力拡大係数を次式のように定義する。

$$\begin{Bmatrix} K_{II}^N \\ K_I^N \\ K_{III}^N \\ K_{IV}^N \end{Bmatrix} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \theta = 0}} \sqrt{2\pi} l_k^{1-\text{Re}(\lambda_c)} \Lambda(\theta) \left\langle (r/l_k)^{1-\lambda_c} \right\rangle \Lambda^{-1}(\theta) \begin{Bmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{32} \\ D_2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

この定義は、Hwu らの定義と同様に界面き裂および均質体中き裂の定義と互換性があり、各モードの変形を定性的にとらえている。また、特異性固有値の数に関わらず4つの値で角部近傍の特異場を正しく表現でき、破壊の工学的評価のためには、より便利であると言える。この後の解析例で両定義による違いを比較・検討する。応力拡大係数は l_k を変更するとその値が変わる。 l_k を $l_{k'}$ に変えたときの応力拡大係数は、次式によって求められる。

$$\mathbf{k}^N(l_{k'}) = \Lambda(0) \left\langle (l_k/l_{k'})^{\text{Re}(\lambda_c)-1} \right\rangle \Lambda^{-1}(0) \mathbf{k}^N(l_k) \quad (23)$$

2・6 退化材料用修正理論

退化材料とは、Stroh formalism という異方性材料の応力関数を用いる際、次式の固有関係式で表される基本弾性行列 \mathbf{N} が non-semisimple となることを言い、物理的な意味ではなく、数学的な意味で退化するということを表す。

$$\mathbf{N}\xi = p\xi \quad (24)$$

ここで、 p は Stroh の固有値、 ξ は Stroh の固有ベクトルである。Stroh formalism は \mathbf{N} が simple または semi-simple である場合に有効であり、材料が退化材料である場合はそのまま用いることはできず、修正を必要とする。退化材料の極端な例が等方性材料であり、その際 Stroh の固有値は $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = i$ で、独立した固有ベクトル ξ も3つしか存在しない。 x_3 軸が対称軸である横等方

性材料も上記と同じ固有値を持つ退化材料である。本研究では、退化材料として一般的な上記2種の結晶系の場合に適用可能な修正理論を、機械的弾性問題の場合の理論¹⁴⁾を圧電問題用に拡張することで導き正しく対処した。等方性材料および x_3 軸が対称軸である横等方性材料の場合に適用可能な弾性スティッフネステンソルとして式 (25) を定義すると、圧電問題における Stroh の固有ベクトル \mathbf{A} , \mathbf{B} を退化材料用に修正したものは式 (26) のようになる。なお、等方性材料の場合、 λ , μ はラメの定数であり、 $C_{44} = \mu$, $e_{24} = 0$ である。

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_1 & -ik_1 & 0 & 0 \\ ik_1 & -\kappa k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & k_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2i\mu k_1 & \mu k_1 & 0 & 0 \\ -2\mu k_1 & -i\mu k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & iC_{44}k_3 + ie_{24}k_4 & ie_{24}k_5 \\ 0 & 0 & ie_{24}k_3 - i\omega_{22}k_4 & -i\omega_{22}k_5 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$k_1^2 = \frac{\lambda + \mu}{4\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad \kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + \mu)},$$

$$k_3^2 = \frac{\omega_{22}(1-i)^2}{4(C_{44}\omega_{22} + e_{24}^2)}, \quad k_4^2 = \frac{e_{24}^2(1-i)^2}{4\omega_{22}(C_{44}\omega_{22} + e_{24}^2)}$$

$$k_5^2 = \frac{(1+i)^2}{4\omega_{22}}$$

また、この場合式 (8) に対応する $\hat{\mathbf{N}}^\lambda$ は以下のようになる。¹⁵⁾

$$\hat{\mathbf{N}}^\lambda(\theta_1, \theta_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \bar{\mathbf{A}} \\ \mathbf{B} & \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi(p, \theta_1, \theta_2, \lambda) & 0 \\ 0 & \Psi(\bar{p}, \theta_1, \theta_2, \lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \mathbf{B}^T & \Gamma \mathbf{A}^T \\ \bar{\Gamma} \mathbf{B}^T & \bar{\Gamma} \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (27)$$

ここで、

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\Psi(p, \theta_1, \theta_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \xi_1^\lambda(\theta_1, \theta_2) & J_1 \xi_1^\lambda(\theta_1, \theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1^\lambda(\theta_1, \theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3^\lambda(\theta_1, \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_4^\lambda(\theta_1, \theta_2) \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\xi_\alpha(\theta_1, \theta_2) = \frac{\xi_\alpha(\theta_1)}{\xi_\alpha(\theta_2)}, \quad \xi_\alpha(\theta) = \cos(\theta) + p_\alpha \sin(\theta),$$

$$J_1 = \frac{\lambda \sin(\theta_1 - \theta_2)}{\xi_1(\theta_1) \xi_1(\theta_2)}$$

である。

3 数値解析例

本研究の手法の精度を実証するために、いくつかの数値解析例を示す。また、二つの応力拡大係数の定義による違いについても議論する。精度の検証については、FEM 結果と応力拡大係数より求めた漸近解を比較することで間接的に行った。なお、以下に示す例題は、今回拡張を行った内容を含むよう便宜的に設定したものであり、実際の構造物を想定したものではない。すなわち、本論文で扱った例題は、実際の問題を取り扱ったものではないが、実際の接合構造物に存在すると想定されるさまざまな接合条件において、十分な解析精度を有していることを実証することを目的とした。

3・1 Free-free surface

この節では角部表面の境界条件として最も一般的な free-free の場合の解析を行う。解析モデルとして、Fig. 4 に示すような PZT-4、PZT-5 および熔融水晶 (Fused-Quartz) の 3 種の材料の接合体を考える。それぞれの材料定数は Table 1 に示す。なお、PZT-4、PZT-5 の CTE は解析のために仮に定めた値である。PZT-4、PZT-5 は横等方性材料であり、熔融水晶は等方性材料である。熔融水晶は退化材料であるので 2・6 節の退化材料用に修正さ

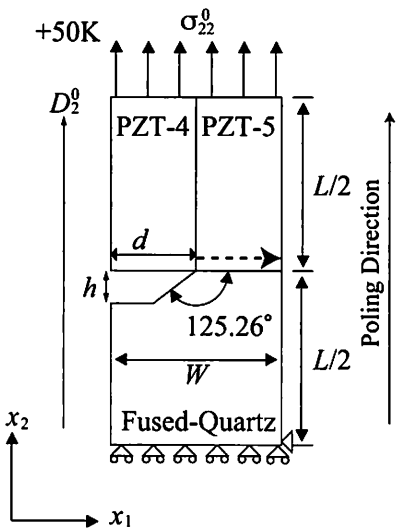


Fig. 4 A PZT-4/PZT-5/Fused-Quartz single-edge interface corner polarized along x_2 -axis.

Table 1 Elastic stiffness C_{ij} [GPa], piezoelectric constants e_{ij} [C/m²], dielectric constants w_{ij} [$\times 10^{-9}$ C/Vm] and CTE a_{ij} [$\times 10^{-6}$ /°C] (poling direction: x_3 -axis).

	PZT-4	PZT-5	Fused-Quartz	ZnO
C_{11}	139	126	78.5	209.6
C_{12}	77.8	55	16.1	120.5
C_{13}	74.3	53	16.1	104.6
C_{33}	113	117	78.5	210.6
C_{44}	25.6	35.3	31.2	42.3
e_{15}	13.4	17.0	0	-0.48
e_{31}	-6.98	-6.5	0	-0.573
e_{33}	13.8	23.3	0	1.321
w_{11}	6.00	15.1	0.0332	0.0757
w_{33}	5.47	13.0	0.0332	0.0903
α_{11}	2.0	2.0	0.55	4.0
α_{33}	2.0	2.0	0.55	2.1

Table 2 Calculated eigenvalues, scalar coefficients and SIFs.

	II	I	III	IV
λ_m	0.710	0.539	0.616	0.718
C_m	1.04×10^{-11}	12.99	0.00	-0.1815
K_m^H	-2.84	32.55	0.00	7.18×10^{-10}
K_m^N	-1.69	34.30	0.00	0.2116

Unit: $C_{I,II,III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{I,II,III}}$, $C_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{IV}}$
 $K_I, K_{II}, K_{III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.461}$, $K_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{0.461}$

れた理論を適用する。この接合体に、一様引張 $\sigma_{22}^0 = 5.0 \text{MPa}$ 、分極方向に電気変位 $D_2^0 = 0.1 \text{C/m}^2$ 、さらに一様温度負荷 $\vartheta^0 = +50 \text{K}$ の複合負荷を加えた場合の解析を行った。ここで、 $d = 1.5 \text{mm}$ 、 $W = 3.0 \text{mm}$ 、 $h = 0.1 \text{mm}$ および $L = 15.0 \text{mm}$ である。また、角部の形状は PZT-4 の開き角 $\alpha = 90^\circ$ 、PZT-5 の開き角 $\beta = 90^\circ$ 、Fused-Quartz の開き角 $\gamma = 125.26^\circ$ である。有限要素解析で用いたメッシュは節点数 2897、要素数 2779、最小メッシュサイズは $m = 0.0001 \text{mm}$ とした。

解析結果として特異性固有値とスカラー係数、および両定義から計算された応力拡大係数を Table 2 に示す。 $\lambda_I \sim \lambda_{III}$ が機械的な特異性固有値であり、 λ_{IV} を電気的なものとしている。ここでは面外方向の変形は考慮していないので K_{III} は表れない。ただし、代表長さ s_k は、これまでの等方性異種材界面き裂の研究¹⁶⁾を参考にして、便宜的に $10 \mu\text{m}$ としており、今後も特に言及しない限りこの値を用いる。これより、それぞれの定義により求めた応力拡大係数を比較すると、 K_I 、 K_{II} に関しては近い値となっているが、 K_{IV} に関しては大きく異なる値となっていることがわかる。さらに、様々な H -integral の積分半径

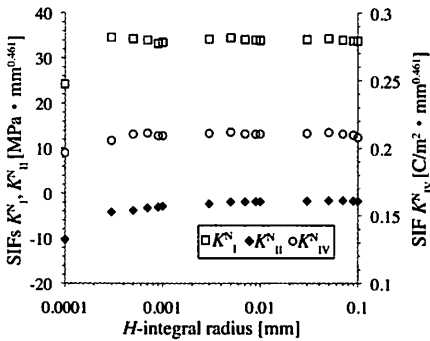


Fig. 5 SIFs calculated from different H -integral radii.

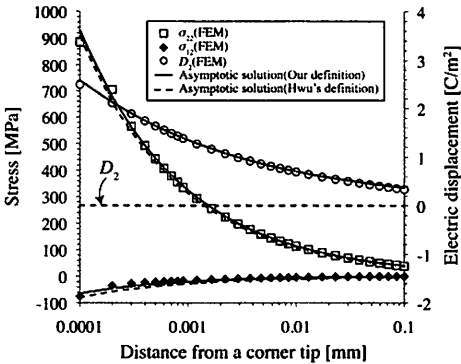


Fig. 6 Distributions of stress and electric displacement with the distance from a corner tip.

を用いて求めた我々の定義による応力拡大係数の値を Fig. 5 に示す。Fig. 5 より、特異点近傍では FEM 結果に誤差が生じるため値が安定しないが、最小メッシュサイズの 10 倍程度以上の領域では安定した値となっていることがわかる。次に、2 つの応力拡大係数の定義による違いについて考察する。Fig. 6 に、Fig. 4 中の破線の矢印に沿った界面での応力および電気変位の漸近解と FEM より直接求めた結果の比較を示す。ここで、FEM による解析結果を図中の記号で表し、実線は我々の定義する応力拡大係数により得られた漸近解を、破線は Hwu らの定義する応力拡大係数により得られた漸近解を示す。ただし、式 (5) の熱による定常項は小さいと考えて無視している。これより、 σ_{12} 、 σ_{22} に関しては 2 つの応力拡大係数から求めた漸近解はいずれも FEM 結果と比較的良好く一致していることがわかる。しかしながら、 D_2 に関しては Hwu らの定義から求めた漸近解は全く一致しておらず、Table 2 から特異電気変位場の影響が応力拡大係数 K_{IV}^H に全く表れていないことがわかる。一方、我々の定義する応力拡大係数より得られた漸近解は、 D_2 に関しても FEM 結果とよく一致しており、特異電気変位場の影響を応力拡大係数 K_{IV}^N に正しく反映できていることがわかる。これは、電気変位の漸近解は、特性固有値 λ_{IV} と強く結びついており、この場合に最も特異性が強い固有値である λ_I に関する応力拡大係数のみを求めた Hwu らの定義では、電気変位の漸近解を正しく表現できないことを意味している。Hwu らの定義で電気変位の漸近解を表現するためには、 λ_{IV} に対応する応力拡大係数の組を別に求めて表す必要があり、工学的な利用には我々が提案した定義の方が便利であると考えられる。

Table 3 Calculated eigenvalues, scalar coefficients and SIFs.

	II	I	III	IV
λ_m	0.420	0.317	0.349	0.282
C_m	0.399	-1.33×10^{-10}	0.00	-2.25×10^4
K_m^H	0.05	-0.06	0.00	0.0654
K_m^N	1.66	-1.92	0.00	0.0649

Unit: $C_{I,II,III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{I,II,III}}$, $C_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{IV}}$
 $K_I, K_{II}, K_{III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.718}$, $K_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{0.718}$

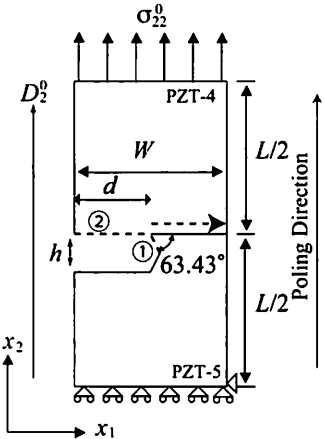


Fig. 7 A PZT-4/PZT-5 single-edge interface corner polarized along x_2 -axis.

3・2 その他の境界条件

前節では角部表面の境界条件として最も一般的な free-free の場合の解析を行ったが、本研究で用いている理論ではその他の境界条件でも解析を行うことができる。そこで、本節では free-free 以外の境界条件で解析を行った結果について示す。

3・2・1 Free-fixed surface

解析モデルとして、Fig. 7 に示すような PZT-4、PZT-5 の 2 種の材料の接合体を考える。本項では角部表面の境界条件が free-fixed である場合を考えるので、Fig. 7 中の①の表面を free、②の表面を fixed とする。この接合体に、一様引張 $\sigma_{22}^0 = 5.0 \text{MPa}$ および分極方向に電気変位 $D_2^0 = 0.1 \text{C/m}^2$ の負荷を加えた場合の解析を行った。ここで、 $d = 1.6 \text{mm}$ 、 $W = 3.2 \text{mm}$ 、 $h = 2.0 \text{mm}$ および $L = 15.0 \text{mm}$ である。また、角部の形状は PZT-4 の開き角 $\alpha = 180^\circ$ 、PZT-5 の開き角 $\beta = 63.435^\circ$ である。有限要素解析で用いたメッシュは節点数 2500、要素数 2401、最小メッシュサイズは $m = 0.0001 \text{mm}$ とした。

解析結果として特異性固有値とスカラー係数、および両定義から計算された応力拡大係数を Table 3 に示す。さらに、Fig. 8 に Fig. 7 中の破線の矢印に沿った界面での応力および電気変位の漸近解と FEM より直接求めた結果の比較を示す。我々の定義から求めた漸近解はすべての成分において FEM 結果とよく一致しているが、Hwu らの定義から求めた漸近解については、この場合に最も特異性が強い固有値である λ_{IV} に関する項 (D_2) のみ精度良く表現できている。

3・2・2 Fixed-free surface

本項では角部表面の境界条件が fixed-free であるので、解析モデルとして、Fig. 7 中の①の表面が fixed、②の表面が free である場合を考える。その他の条件は 3・2・1 項と同様である。

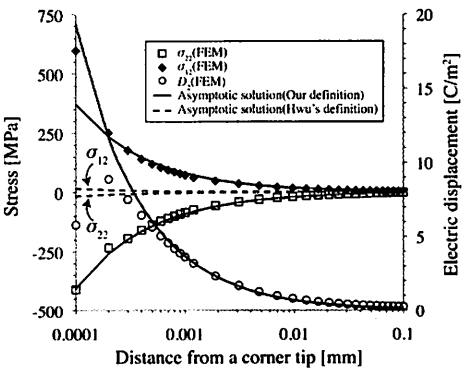


Fig. 8 Distributions of stress and electric displacement with the distance from a corner tip.

Table 4 Calculated eigenvalues, scalar coefficients and SIFs.

	II	I	III	IV
λ_m	$0.394 + 0.0119i$	$0.394 - 0.0119i$	0.389	0.432
C_m	$-3.29 + 5.73i$	$-3.29 - 5.73i$	0.00	0.0882
K_m^H	2.27×10^{-6}	-1.84×10^{-6}	0.00	-7.04×10^{-6}
K_m^N	-6.76	21.03	0.00	0.1800

Unit: $C_{I,II,III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{I,II,III}}$, $C_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{IV}}$
 $K_I, K_{II}, K_{III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.611}$, $K_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{0.611}$

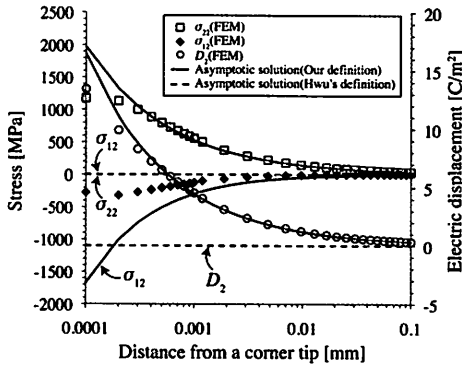


Fig. 9 Distributions of stress and electric displacement with the distance from a corner tip.

解析結果として特異性固有値とスカラー係数, および両定義から計算された応力拡大係数を Table 4 に示す. また, その結果より求めた, Fig. 7 中の破線の矢印に沿った界面での応力および電気変位の漸近解と FEM より直接求めた結果の比較を Fig. 9 に示す. この場合に最も支配的な固有値である λ_{III} は面外項に強く結びついており, それに関する特異場を評価した Hwu らの定義は他の成分の特異場を全く表現できていない. 一方で我々の定義は, σ_{12} については他の成分に比べ漸近特性が良くないものの, それぞれの特異場を程度良く表現できている.

このように特異性固有値に複素数が含まれる場合, スカラー係数も複素数となり, スカラー係数を破壊のクライテリアンとしては扱いづらく, また, 変形モードとの対応もない. それに対し, 我々の定義から得られた応力拡大係数は変形モードに近い値を表しており, 直感的に理解しやすい. これは, 特異性固有値やスカラー係数が実数である場合に関しても言えることである.

Table 5 Calculated eigenvalues, scalar coefficients and SIFs.

	II	I	III	IV
λ_m	0.871	0.672	0.767	0.835
C_m	1.74	1.24	0.00	-0.0018
K_m^H	-2.25	3.11	0.00	0.0016
K_m^N	-0.54	6.27	0.00	0.0694

Unit: $C_{I,II,III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{I,II,III}}, C_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{IV}}$
 $K_I, K_{II}, K_{III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.328}, K_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{0.328}$

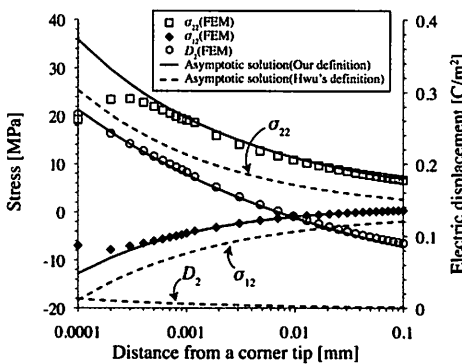


Fig. 10 Distributions of stress and electric displacement with the distance from a corner tip.

3・2・3 Fixed-fixed surface 本項では角部表面の境界条件が fixed-fixed であるので, 解析モデルとして, Fig. 7 中の①, ②の表面が共に fixed である場合を考える. その他の条件は 3・2・1 項と同様である.

解析結果として特異性固有値とスカラー係数, および両定義から計算された応力拡大係数を Table 5 に示す. さらに, その結果より求めた, Fig. 7 中の破線の矢印に沿った界面での応力および電気変位の漸近解と FEM より直接求めた結果の比較を Fig. 10 に示す. 我々の定義はすべての漸近解を精度良く表現できているのに対し, Hwu らの定義は全く表せていないことがわかる.

3・2・4 Bonded surface 解析モデルとして, Fig. 11 に示すような PZT-4, PZT-5, ZnO の 3 種の材料の接合体を考える. ZnO の材料定数は Table 1 に示してある. この接合体に, 分極方向に電気変位 $D_2^0 = 0.1 \text{ C/m}^2$ の負荷を加えた場合の解析を行った. ここで, $d = 7.2 \text{ mm}$, $W = L = 14.4 \text{ mm}$ である. また, 角部の形状は PZT-4 の開き

Table 6 Calculated eigenvalues, scalar coefficients and SIFs.

	II	I	III	IV
λ_m	0.992	0.961	0.968	0.601
C_m	-0.027	-6.59×10^{-11}	0.00	-2.66×10^5
K_m^H	0.252	-0.666	0.00	0.3666
K_m^N	0.271	-0.325	0.00	0.3666

Unit: $C_{I,II,III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{I,II,III}}, C_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{1-\lambda_{IV}}$
 $K_I, K_{II}, K_{III} \dots \text{MPa} \cdot \text{mm}^{0.399}, K_{IV} \dots \text{C/m}^2 \cdot \text{mm}^{0.399}$

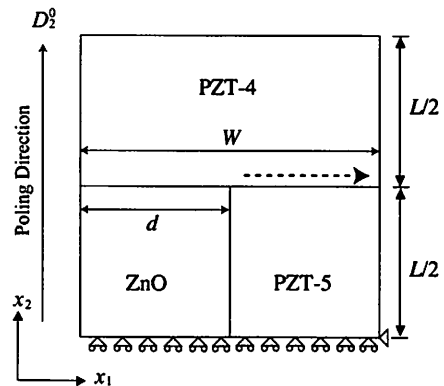


Fig. 11 PZT-4/PZT-5/ZnO bonded interface corner polarized along x_2 -axis.

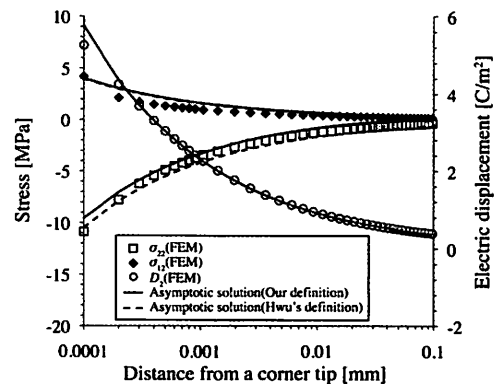


Fig. 12 Distributions of stress and electric displacement with the distance from a corner tip.

角 $\alpha = 180^\circ$, PZT-5 の開き角 $\beta = 90^\circ$, ZnO の開き角 $\gamma = 90^\circ$ である。有限要素解析で用いたメッシュは節点数 4229, 要素数 4196, 最小メッシュサイズは $m = 0.0001\text{mm}$ とした。

解析結果として特異性固有値とスカラー係数, および両定義から計算された応力拡大係数を Table 6 に示す。さらに, その結果より求めた, Fig. 11 中の破線の矢印に沿った界面での応力および電気変位の漸近解と FEM より直接求めた結果の比較を Fig. 12 に示す。本ケースは, 最も特異性の強い固有値 λ_{IV} 以外の固有値の特異性が極めて弱いいため, 2 つの漸近解がほぼ等しくなっている。

4 結 言

野村らによって確立された熱応力下での異方性異種材料界面角部の応力拡大係数解析手法を圧電問題用に拡張し, 材料数や接合構造, 角部表面の境界条件の制限を取り払うことで一般性の高い解析手法を開発した。また, Stroh formalism を用いる際に数学的な問題が発生する退化材料への対応についても, 機械的弾性問題での理論を圧電問題に拡張したものを示した。得られた応力拡大係数の精度は, 応力拡大係数より求めた漸近解と FEM 結果を比較することで検証し, さまざまな条件の下で本解析手法が有効であることを示した。

また, 応力拡大係数の定義に関して, Hwu らの定義と我々の定義が異なるため, 両定義の応力拡大係数により求めた漸近解と FEM 結果を比較することで, 両定義の違いについて検討した。Hwu らの定義する応力拡大係数では, 最も支配的な特異性固有値 λ_c に強く結びついた漸近解しか表現できず, それだけでは不十分であることがわかった。一方, 我々の定義する応力拡大係数は, すべての漸近解を一組の応力拡大係数のみで精度良く表現できており, 破壊基準としての工学的応用のためには, より便利であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) Z. Suo, C. M. Kuo, D. M. Barnett and J. R. Willis, "Fracture mechanics for piezoelectric ceramics", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol.40, No.4, pp.739-765 (1992).
- 2) Y. E. Pak, "Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials", *International Journal of Fracture*, Vol.54, No.1, pp.79-100 (1992).
- 3) H. Sosa and N. Khutoryansky, "New developments concerning piezoelectric materials with defects", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.33, No.23, pp.3399-3414 (1996).
- 4) M. Y. Chung and T. C. T. Ting, "Line force, charge, and dislocation in anisotropic piezoelectric composite wedges and spaces", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol.62, No.2, pp.423-428 (1995).
- 5) S. Shen and Z. B. Kuang, "Interface crack in bi-piezothermoelastic media and the interaction with a point heat source", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.35, No.30, pp.3899-3915 (1998).
- 6) L. Banks-Sills, Y. Motola and L. Shemesh, "The M -integral for calculating intensity factors of an impermeable crack in a piezoelectric material", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.75, No.5, pp.901-925 (2008).
- 7) C. Hwu, "Some explicit expressions of extended Stroh formalism for two-dimensional piezoelectric anisotropic elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.45, No.16, pp.4460-4473 (2008).
- 8) C. Hwu and T. Ikeda, "Electromechanical fracture analysis for corners and cracks in piezoelectric materials", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.45, No.22-23, pp.5744-5764 (2008).
- 9) Y. Nomura, T. Ikeda and N. Miyazaki, "Stress singularity analysis at an interfacial corner between anisotropic bimetals under thermal stress", *Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.74, No.737, pp.37-44 (2008).
- 10) Y. Nomura, T. Ikeda and N. Miyazaki, "Stress intensity factor analysis at an interfacial corner between anisotropic bimaterials under thermal stress", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.76, No.2, pp.221-235 (2009).
- 11) Labossiere PEW and Dunn ML, "Stress intensities at interface corners in anisotropic bimaterials", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.62, No.6, pp.555-575 (1999).
- 12) D. Munz, T. Fett and Y. Y. Yang, "The regular stress term in bonded dissimilar materials after a change in temperature", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.44, No.2, pp.185-194 (1993).
- 13) B. A. Boley and JH. Weiner, "Theory of Thermal Stresses", Wiley, New York, (1962).
- 14) T. C. T. Ting and C. Hwu, "Sextic formalism in anisotropic elasticity for almost non-semisimple matrix N ", *International Journal of Solids and Structures*, Vol.24, No.1, pp.65-76 (1988).
- 15) A. Barroso, V. Mantic and F. Paris, "Singularity analysis of anisotropic multimaterial corners", *International Journal of Fracture*, Vol.119, No.1, pp.1-23 (2003).
- 16) T. Ikeda, N. Miyazaki, T. Soda and T. Munakata, "Mixed mode fracture criteria of interface crack between dissimilar materials", *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Vol.58, No.555, pp.2080-2087 (1992).