Bulletin of the JSME
日本機械学会論文集
Transactions of the JSME (in Japanese)
Vol.83, No.845, 2017

三次元異方性異種材接合角部の特異応力場解析

古賀 裕二[*1]，田口 陽介[*2]，小金丸 正明[*3]，池田 徹[*4]，宮崎 則幸[*5]

Development of the singular stress analyses for three-dimensional interfacial corners

Yuji KOGA[*1], Yosuke TAGUCHI[*2], Masaaki KOGANEMARU[*3], Toru IKEDA[*4] and Noriyuki MIYAZAKI[*5]

[*1, *3, *4] Department of Mechanical Engineering, Kagoshima University, 1-21-40 Korimoto, Kagoshima, Kagoshima 890-0065, Japan
[*2] Kawasaki Heavy Industries, Ltd., 1-1 Kawasaki-Cho, Akashi, Hyogo 673-8666, Japan
[*5] Green Electronics Research Institute, Kitakyushu, 1-8 Hibikino, Wakamatsu-ku, Kitakyushu, Fukuoka 808-0135, Japan

Received: 28 August 2016; Revised: 8 October 2016; Accepted: 2 December 2016

Abstract

We proposed a new technique to analyze the asymptotic solution around a three dimensional interface corners. We analyzed the scalar parameters of the asymptotic solutions using the *H*-integral, which is a conservative integral, in conjunction with the finite element analysis. Singular orders of these three-dimensional corners were obtained using the finite element method for the eigen analysis. If λ is an eigen value of a three dimensional corner, $-\lambda-1$ is also an eigen value. Complementary eigen values and eigen vectors are used for the *H*-integral analysis to obtain the scalar parameters. If we select the eigenvalue, $-\lambda-1$, as the complementary eigenvalue for the *H*-integral, the *H*-integral corresponds with a scalar parameter of the asymptotic solution. We proposed the normalization of the eigenvalues for defining the obtained scalar parameters as the unique values. We demonstrate that the obtained asymptotic solutions correspond well with the stress field obtained by the finite element analyses around three-dimensional interface corners.

Key words: Three-dimensional corners, Asymptotic solution, Scalar parameter, Eigen value, *H*-integral, Conservative integral

1. 緒　　言

近年，携帯電話やノートパソコンなどの電子機器は小型で軽量，かつ高性能なものの開発が行われている．このような電子機器に組み込まれる電子デバイスなども小型化が実現されているが，これらの小型化は多種多様な性質の材料を限られた小さな範囲に積層する技術により達成されている．これら電子デバイスのように，性質の異なる材料を積層することで有用な働きを持たせている構造物などには多くの接合界面が生じ，その接合角部には材料定数の違いにより特異応力場が発生する．接合角部は，き裂が発生するなど破壊の起点となることがあるため，接合角部での強度信頼性や破壊の挙動評価のためにも接合角部における特異応力場の評価手法の確立が求められている．

これまで，異種材接合角部の特異応力場の研究は，多くの研究者によって行われてきた．William は，固有値展開法を用いて，均質体中の鋭い V ノッチ周りの応力場の特異性固有値と固有関数を求め(Williams, 1952)，これをき裂周りの応力場にまで拡張して議論している(Williams, 1957)．実際の応力場を明らかにするには，William の固有値展開法による式のスカラーパラメーターや応力拡大係数を求めることが必要である．Stern ら(Sterm et al., 1976)や Sinclair ら(Sinclair et al., 1984)は，Betti の相反定理に基づいた *H*-integral によって，均質体中のき裂の応力

No.16-00382 [DOI:10.1299/transjsme.16-00382], J-STAGE Advance Publication date: 16 December, 2016
[*1] 鹿児島大学大学院　理工学研究科（〒890-0065　鹿児島県鹿児島市郡元 1-21-40）
[*2] 川崎重工業（株）（〒673-8666　兵庫県明石市川崎町 1-1）
[*3] 正員，鹿児島大学学術研究院　理工学域工学系
[*4] 正員，フェロー，鹿児島大学学術研究院　理工学域工学系
[*5] 正員，フェロー，北九州市環境エレクトロニクス研究所（〒808-0135　福岡県北九州市若松区ひびきの 1-8）
E-mail of corresponding author: ikeda@mech.kagoshima-u.ac.jp

拡大係数を求めている．Carpenter は，*H*-integral を用いて，任意の開き角の V ノッチの応力拡大係数を求めた (Carpenter, 1984)．異方性材料の接合角部の特異性指数については，Labossiere らが *H*-integral を用いて，異方性異種材接合角部のスカラーパラメーターを求めた (Labossiere and Dunn, 1999)．さらに Hwu らが Key Matrix を提唱し，多種の異方性材料が接合された接合角部の特異性固有値と固有関数を解析的に求められるようになった (Hwu et al., 2003)．Hwu らはさらに *H*-integral を用いて機械的荷重下の異方性異種材接合角部のスカラーパラメーターを求めるだけでなく，異種材接合角部からき裂までを統一的に示す応力拡大係数の定義を提案した (Hwu and Kuo, 2007)．野村らは，熱応力と機械的荷重が共に負荷される場合のスカラーパラメーターを *H*-integral を改良して求め，Hwu らの提唱した応力拡大係数のより実用性の高い定義を提案した (Nomura et al., 2009)．また，接合角部近傍で平面ひずみとみなせるような疑似３次元問題の応力拡大係数の解析を行った (Nomura et al., 2010).

しかし，実際の破壊現象では完全な 3 次元角部，接合角部のエッジ部分のような角部からの破壊が問題となることも多く，こういった 3 次元角部での応力集中の評価手法の確立が求められている．完全な３次元接合角部の特異性固有値と固有関数を求める手法は，Pegeau らによって，有限要素法を用いた固有値解析手法として数値的に解析する手法が提案されている (Pegeau et al., 1995)．この手法は古口らによって，境界要素法にも適用された (Koguchi and Muramoto, 2000)．著者らは，前報(池田他, 2013)において，有限要素法解析を用いて三次元接合角部の特性応力場の固有値解析を行い，*H*-integral 法を用いてスカラーパラメーターを解析し，応力の漸近解を求める方法を提案した．*H*-integral 法によってスカラーパラメーターを求めるには，適切な補助解を選ぶ必要がある．２次元問題においては，対象とする問題の特異性固有値が λ のとき，$-\lambda$ もまた特異性固有値の一つになることを利用して，*H*-integral がスカラーパラメーターに一致するように$-\lambda$ を補助解に選択した．２次元問題においては，Wu らによって特異性固有値が λ のとき, $-\lambda$ もまた特異性固有値の一つになることが解析的に示されている(Wu et al., 1993)．古口らは，三次元問題においては，*H*-integral に用いる補助解の特異性指数は $3-\lambda$ に設定することが有効であるとして，固有値が単一の実数解である場合のスカラーパラメーターを求めた(Luangarpa and Koguchi, 2014)．本研究では，２次元問題で用いた手法を３次元問題に拡張して，固有値とスカラーパラメーターが複数ある場合に，それぞれのスカラーパラメーターを *H*-integral により求めることができることを半解析的な方法で証明した．古口らと著者らの漸近解の定義の違いにより，著者らの漸近解と定義では$-\lambda-1$ を補助解にとったが，これは古口らの補助解の特異性指数 $3-\lambda$ と本質的に同じである．本研究では，$-\lambda-1$ を補助解にとることにより，*H*-integral の値が複数のスカラーパラメーターに収束することを理論的に考察した．また，前報(池田他, 2013)においては，固有値を求める有限要素分割数を変化させると固有関数とスカラーパラメーターが変動するなどの問題が見られた．これは，求めた固有関数がスカラー乗倍の無数の解を持つことに起因しており，固有関数を正規化する定義を導入することで，一意的にスカラーパラメーターを求められることを示す．これにより，求めたスカラーパラメーターを破壊の支配パラメーターに結びつけることが容易になることが期待できる．

2. 解析理論

2・1 特異応力・変位場

Williams の固有値展開法(Williams, 1952, 1957, Labossiere and Dunn, 1999, Banks-Sills and Ishbir, 2004, Munz et al., 1993)によれば角部の特異点を原点として，特異点からの距離を r とすると角部近傍の応力，変位は次式のように表すことができる．

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{k} &= \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}\left(\theta,\phi\right) \\
u_i^{k} &= \sum_{m=1}^{\mathrm{N}} C_m r^{\lambda_m} g_i^{mk}\left(\theta,\phi\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

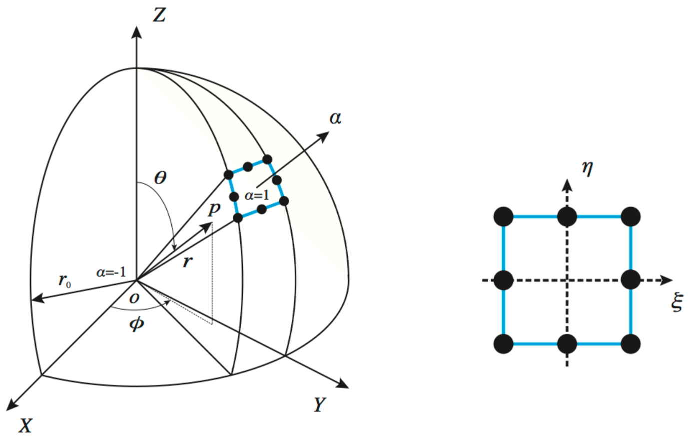

Fig. 1　Definition of the element geometry and the polar coordinates around a three-dimensional singular point.

ここで，　C_mはスカラーパラメーターと呼ばれる定数値であり，後述する H-integral によって求められる．また，λ_mは特異性固有値，$f_{ij}^{mk}(\theta,\phi)$, $g_i^{mk}(\theta,\phi)$は特異性固有値に対応する固有関数で，これらは 2 つの材料の材料定数と角部の形状を表す角度から決定され，負荷条件には依らない．

2・2　特異性指数解析

本研究では特異性指数と固有関数を Pageau ら(Pageau and Biggers, 1995)が提案する方法によって求めた．点 o の特異点周りの領域を図 1 のような要素に分割すると要素内のある点での変位$\bar{u}$ は次のように表せる．

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \rho^{\lambda}\left[\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\bar{u}_i\right]\\ \rho &= r/r_0\end{aligned} \tag{2}$$

ここで, n は節点数で本研究では 8 節点要素を用いたので n=8 である. r は要素内点までの距離, r_0 は要素の半径, $\bar{u}_i$ は節点での変位，Ω_i は内挿関数である．この要素に仮想仕事の原理を用いることで以下の式が導ける．

$$\left(\lambda^2[A]+\lambda[B]+[C]\right)\{\bar{U}\}=0 \tag{3}$$

式 (3) は以下の式 (4) のように変形することができ，式 (4) の固有値問題を解くことで固有指数λが得られる．

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{V}\\ \bar{U}\end{Bmatrix}=\lambda\begin{Bmatrix}\bar{V}\\ \bar{U}\end{Bmatrix} \tag{4}$$

実際には，次式のように変形し，疎行列の一般化固有値分解として解析した．

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \lambda \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

このとき，$\bar{U}$ より得られる各要素の節点変位を $\bar{u}_i$ とするとき，$g_i^{mk}(\theta,\phi)$ を次式のように設定する．

$$g_i^{mk}(\theta,\phi) = \left[\sum_{i=1}^{n} \Omega_i \bar{u}_i \right] \tag{6}$$

このとき，$f_{ij}^{mk}(\theta,\phi)$ は，次式で示される．

$$f_{ij}^{mk}(\theta,\phi) = [D] \left[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_m B_{ia} + B_{ib}) \bar{u}_i \right] \tag{7}$$

ここで，Dは弾性マトリックスB_a と B_b は変位-ひずみマトリックスの一部であり，k は各材料を示している．しかし，固有関数はスカラー数倍の無数の解を持つため，後述する H-integral によって得られるスカラーパラメーターも無数の解を持つことになる．そこで一義的にスカラーパラメーターを求めるために，次式を満たすように節点変位を正規化した．この正規化した節点変位を用いることで，計算により一義的にスカラーパラメーターを得ることを可能にした．前報（池田他，2013）において，有限要素分割数によってスカラーパラメーターが変動した原因もこの正規化を行わなかったことに起因することが判明した．

$$\frac{\int \left| g_i^{mk}(\theta,\phi) \right|^2 dS}{\int \gamma \, dS} = 1 \tag{8}$$

ここで，γ は任意の正規化定数である．

2・3　*H* - integral

Betti の相反定理に基づき，特異点を含まない弾性体中の任意の領域 V に対して，次式が成り立つ．

$$\int_V \left(\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} \right) dV = 0 \tag{9}$$

ここで，σ_{ij}，ε_i は第一の応力とひずみ，σ_{ij}*，ε_i*は第二の応力とひずみである． Gauss の発散定理により，次式が得られる．

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}) dV &= \int_V (\sigma_{ij} u_{i,j}^* - \sigma_{ij}^* u_{i,j}) dV \\ &= \int_S (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，S は V を囲む面である．また，*の付いていない σ_{ij} と u_i は第 1 番目の応力と変位であり，以下解析対象とする．一方で，*の付いた σ^*_{ij} と u^*_i は第 2 番目の応力と変位であり，以下補助場とする．次に，図 2 の特異点 o

まわりに特異点を囲むような領域を考える．図 2 に示すように S_r は特異点 o からの距離 r である球面，S_ε は特異点 o からの距離 ε である球面，S_1, S_2, S_3 は自由表面を示している．S_1, S_2, S_3 上で補助場も自由表面の境界条件をとるように選択すると，積分値は 0 となる．そのため，S_r と S_ε が残り，次式が得られる．

$$\int_{S_r}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j dS + \int_{S_\varepsilon}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j dS = 0 \tag{11}$$

次に S_ε’として S_ε の反対側，つまり反対向きの法線ベクトルを持つ面を考えると，式(9)は次式のようになる．

$$\int_{S'_\varepsilon}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j dS = \int_{S_r}(\sigma_{ij}u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i)n_j dS \tag{12}$$

また，参照解は解析対象と同じ境界条件を満たす補助場である．ここで，λ が固有値であれば$-\lambda-1$ も固有値であると仮定し，式（1）に $\lambda = -\lambda-1$ を代入したものを参照解とした．λ が固有値であれば$-\lambda-1$ も固有値であることは，後述するように数値的に確認した．次式に参照解を示す．

$$\sigma_{ij}^{k*} = C_m^* r^{-\lambda_m-2} f_{ij}^{mk*}(\theta,\phi)$$
$$u_i^{k*} = C_m^* r^{-\lambda_m-1} g_i^{mk*}(\theta,\phi) \tag{13}$$

ここで，$f_{ij}^{mk*}(\theta,\phi)$ と $g_i^{mk*}(\theta,\phi)$ は，式(5)を解いた際に固有値$-\lambda-1$ に対応した固有ベクトルを式(6)，式(7)に適用して求める．このとき，式(10)の左辺は m=I を選ぶとき，次式で示される．

$$\begin{aligned}
H_{\mathrm{I}} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint(\sigma_{ij}^k u_i^{k*} - \sigma_{ij}^{k*}u_i^k)n_j\varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint(\sigma_{rr}u_r^* + \sigma_{r\theta}u_\theta^* + \sigma_{r\phi}u_\phi^* - \sigma_{rr}^* u_r - \sigma_{r\theta}^* u_\theta - \sigma_{r\phi}^* u_\phi)n_r\varepsilon^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint(C_I C_I^*(f_{rr}^I(\theta,\phi)g_r^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\theta}^I(\theta,\phi)g_\theta^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\phi}^I(\theta,\phi)g_\phi^{I*}(\theta,\phi) \\
&\quad - f_{rr}^{I*}(\theta,\phi)g_r^I(\theta,\phi) - f_{r\theta}^{I*}(\theta,\phi)g_\theta^I(\theta,\phi) - f_{r\phi}^{I*}(\theta,\phi)g_\phi^I(\theta,\phi)) \\
&\quad + C_{II}C_I^*\varepsilon^{\lambda_{II}-\lambda_I}(f_{rr}^{II}(\theta,\phi)g_r^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\theta}^{II}(\theta,\phi)g_\theta^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\phi}^{II}(\theta,\phi)g_\phi^{I*}(\theta,\phi) \\
&\quad - f_{rr}^{I*}(\theta,\phi)g_r^{II}(\theta,\phi) - f_{r\theta}^{I*}(\theta,\phi)g_\theta^{II}(\theta,\phi) - f_{r\phi}^{I*}(\theta,\phi)g_\phi^{II}(\theta,\phi)) \\
&\quad + C_{III}C_I^*\varepsilon^{\lambda_{III}-\lambda_I}(f_{rr}^{III}(\theta,\phi)g_r^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\theta}^{III}(\theta,\phi)g_\theta^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\phi}^{III}(\theta,\phi)g_\phi^{I*}(\theta,\phi) \\
&\quad - f_{rr}^{I*}(\theta,\phi)g_r^{III}(\theta,\phi) - f_{r\theta}^{I*}(\theta,\phi)g_\theta^{III}(\theta,\phi) - f_{r\phi}^{I*}(\theta,\phi)g_\phi^{III}(\theta,\phi)) \\
&\quad + C_{IV}C_I^*\varepsilon^{\lambda_{IV}-\lambda_I}(f_{rr}^{IV}(\theta,\phi)g_r^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\theta}^{IV}(\theta,\phi)g_\theta^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\phi}^{IV}(\theta,\phi)g_\phi^{I*}(\theta,\phi) \\
&\quad - f_{rr}^{I*}(\theta,\phi)g_r^{IV}(\theta,\phi) - f_{r\theta}^{I*}(\theta,\phi)g_\theta^{IV}(\theta,\phi) - f_{r\phi}^{I*}(\theta,\phi)g_\phi^{IV}(\theta,\phi)))n_r \sin\theta d\theta d\phi
\end{aligned} \tag{14}$$

参照解に$-\lambda-1$ を選ぶことで，微小項の ε^2 が相殺されて，積分値が 0 でない有限値となる．ここで，積分は球面上に行っているので，法線ベクトルの半径方向成分 n_r は，n_r=1 である．また，

$$\iint(f_{ij}^{lk}(\theta,\phi)g_i^{mk*}(\theta,\phi) - f_{ij}^{mk*}(\theta,\phi)g_i^{lk}(\theta,\phi))\sin\theta\, d\theta\, d\phi = 0 \quad l \neq m \tag{15}$$

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]

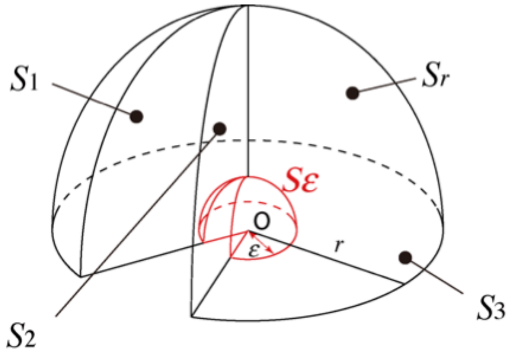

Fig. 2　Domain and boundary surfaces for the H-integral.

と仮定すると次式が成り立つ．式(15)が正しいことを解析的に証明することは難しく，実際の解析例で数値的に示す．

$$H_I = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint C_I C_I^* (f_{rr}^I(\theta,\phi) g_r^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\theta}^I(\theta,\phi) g_\theta^{I*}(\theta,\phi) + f_{r\phi}^I(\theta,\phi) g_\phi^{I*}(\theta,\phi) - f_{rr}^{I*}(\theta,\phi) g_r^I(\theta,\phi) - f_{r\theta}^{I*}(\theta,\phi) g_\theta^I(\theta,\phi) - f_{r\phi}^{I*}(\theta,\phi) g_\phi^I(\theta,\phi)) \sin\theta d\theta d\phi \tag{16}$$

C_m^*を次式の様に設定する．

$$\frac{1}{C_m^*} = \iint \left(f_{ij}^{mk}(\theta,\phi) g_i^{mk*}(\theta,\phi) - f_{ij}^{mk*}(\theta,\phi) g_i^{mk}(\theta,\phi) \right) \sin(\theta) d\theta d\phi \tag{17}$$

このようにC_m^*を設定することにより，m=I のとき，$H_{\mathrm{I}}= C_{\mathrm{I}}$となる．また，$m$= II, III, IV の場合も補助場に$-\lambda_{\mathrm{II}}-1$, $-\lambda_{\mathrm{III}}-1, -\lambda_{\mathrm{IV}}-1$ を代入して，式(14)と同様の式展開を行うことで，H_m=C_mとなる．このとき，式(12)より，H-integral の値は角部先端を囲むような次式のS_r上の積分を行うことにより求められる．S_rは特に球面上を積分する必要は無いが，本論文の例では，固有値解析に用いた図 1 の有限要素をそのまま用いて，一定半径の部分球上を積分した．

$$H = \int_{S_r} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS \tag{18}$$

H-integral の積分では，実応力と変位を通常の有限要素解析により求め，補助解には式(5)より求めた補助解の固有値$-\lambda-1$ とそれに対応した固有ベクトルより，式(6)(7)(13)を用いて求めたu_i^*とσ_i^*を用いた．

3.　解析結果

3・1　異種材接合角部 I

解析モデルとして図 3 に示すような接合体に一様引張りσ_{xx}^0を加えた場合を考える．このモデルについて，以下 2 種類の解析を行った．モデル形状は，$W = T = 2.0$ mm，$w = t = 1.0$ mm，及び$L = 1.0$ mm とした．

3・1・1　材料がともに等方性材料の場合

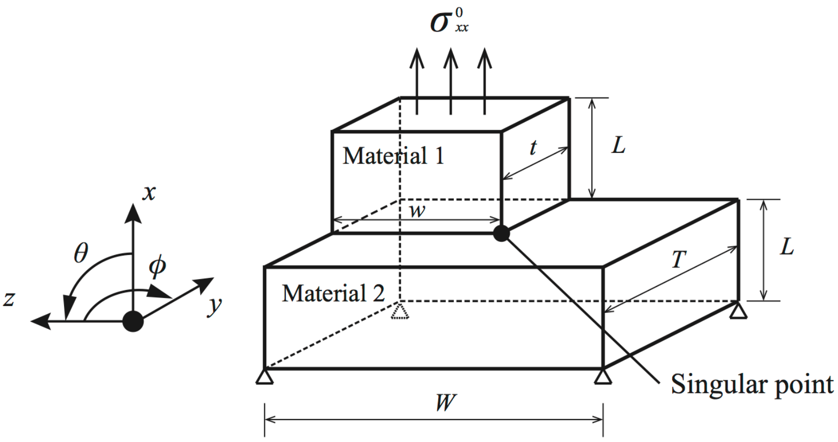

Fig. 3　Schematic of an analysis model (Model I).

Table 1　Material properties of materials 1 and 2 in Fig. 3 (Model I, Isotropic).

Material		1	2
Young's modulus	E (GPa)	0.726	72.6
Poisson's ratio	N	0.3	0.3

Table 2　Obtained eigenvalues (FE Elements in Fig. 1= 2000, Model I, Isotropic).

	$\lambda_{\mathrm{III}}^{*}$	$\lambda_{\mathrm{II}}^{*}$	λ_{I}^{*}		λ_{I}	λ_{II}	λ_{III}
Eigenvalues	-1.9983	-1.9969	-1.6198	-1.0001	0.6198	0.9969	0.9983

Table 3　Obtained scalar parameters (H-integral meshes = 2000, Model I, Isotropic).

$(\mathrm{N}\cdot\mathrm{mm}^{-1-\lambda})$	C_{I}	C_{II}	C_{III}
Scalar parameter	10.7743	-0.0014	2.2217

Table 4　Integrated values of Eq. (13) (H-integral meshes = 2000, Model I, Isotropic).

Elements	l = I, m = II	l = I, m = III	l = II, m = I	l = II, m = III	l = III, m = I	l = III, m = II
2000	1.920×10^{-9}	1.487×10^{-8}	2.253×10^{-9}	6.375×10^{-6}	5.452×10^{-9}	2.388×10^{-6}

材料 1，2 ともに等方性材料の接合体を考え，一様引張り $\sigma_{xx}{}^{0} = 50.0$ MPa を加えた場合の接合角部の漸近解の解析を行った．用いた材料定数を表 1 に，固有値分解の結果として求めた特異性指数を表 2 に，H-integral によって求めたスカラーパラメーターを表 3 にそれぞれ示す．特異性指数 λ_m には，$0<\lambda_m<1$ の範囲で値の小さいものから順に m = I, II, III, …と番号付けをし，スカラーパラメーター C_m も特異性指数に対応するように m = I, II, III, …と番号付けを行っている．特異性指数には，$-2<\lambda_m{}^{*}\leq-1$ の範囲のものも示した．表 2 に示すように λ が固有値のとき，$-\lambda-1$ も固有値であることがわかる．これらの解析値は，固有値解析とのための有限要素数と H-integral のための積分要素数が共に 2000 のものであり，式（8）では $\gamma = 0.001$ としている．また，H-integral の積分半径は最小メッシュサイズの 10 倍程度である $r = 0.015$ mm とした．図 3 中の $\phi = \pi/4$, $\theta = 5\pi/12$ の位置での式(1)より求められる漸近解と FEM の結果を図 4 に示す．図 4 より，特異点に非常に近いところでは FEM 結果が誤差を含むので一致しなくなるということを除けば，漸近解と FEM がよく一致しており，精度よくスカラーパラメーターの計算を行えていると考えられる．

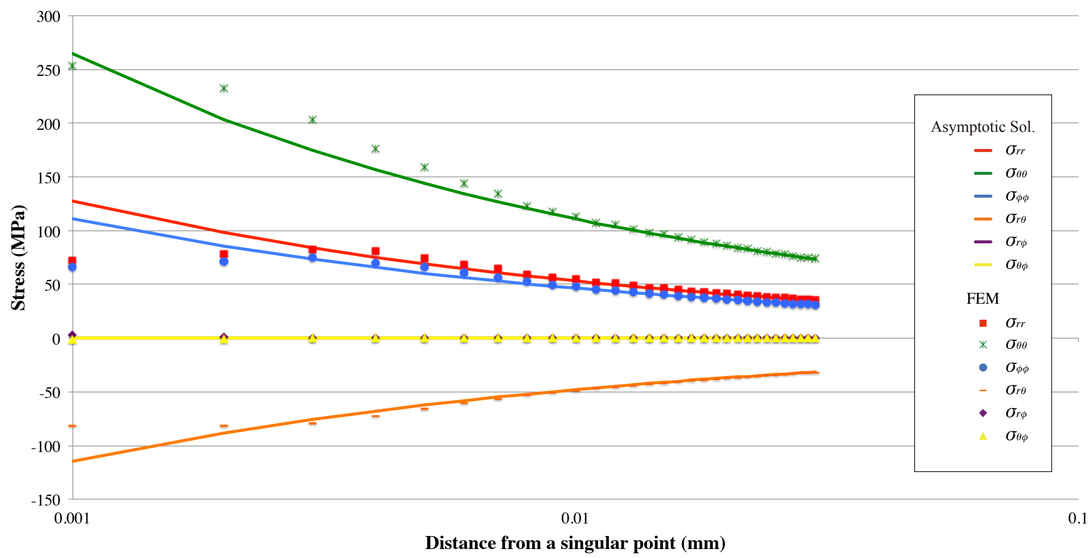

Fig. 4　Distributions of stresses at $\phi = \pi/4$, $\theta = 5\pi/12$ with the distance from a singular point (H-integral meshes = 2000, Model I, Isotropic).

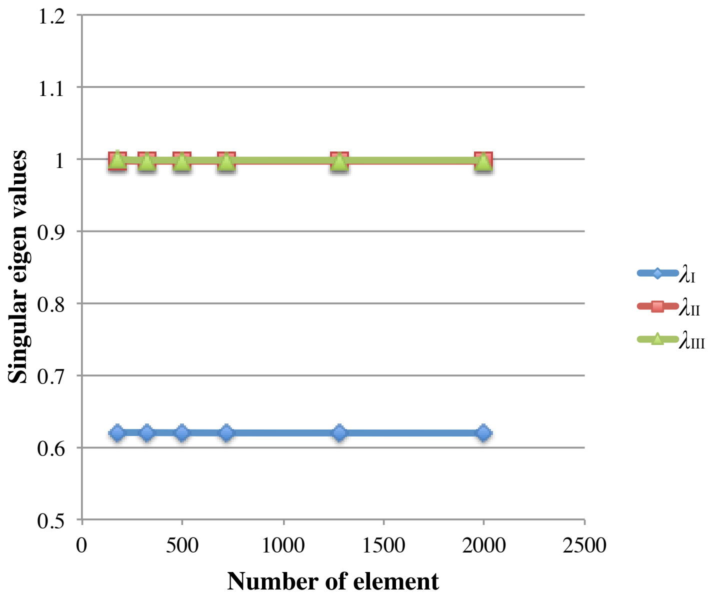

Fig. 5　Obtained singular eigenvalues with the number of FE elements in Fig. 1 (Model I, Isotropic).

また，式（15）の積分値を計算すると，表 4 に示すようにほぼ 0 とみなせる値であることがわかり，式(15)が成立することを間接的に示している．

さらに，固有値解析に用いた有限要素数と特異性固有値の関係を図 5 に，H-integral に用いた積分要素数とスカラーパラメーターとの関係を図 6 に示した．これより，固有値解析の有限要素数を増やしても，得られた特異性固有値やスカラーパラメーターの値が変化せず安定した計算が行えていることがわかる．また，図 7 に H-integral の経路独立性を示した．これより，経路独立性も成り立っていることがわかる．

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]

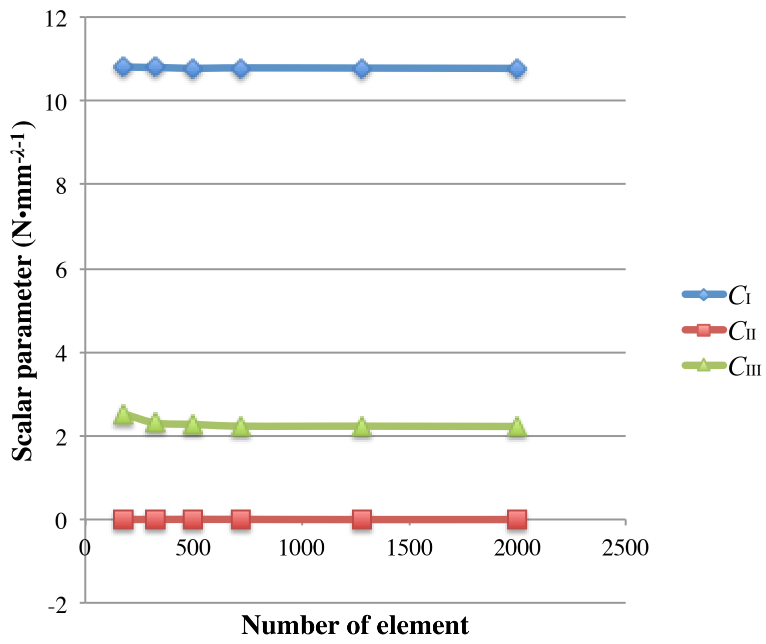

Fig. 6　Obtained scalar parameters with the number of H-integral meshes (Model I, Isotropic).

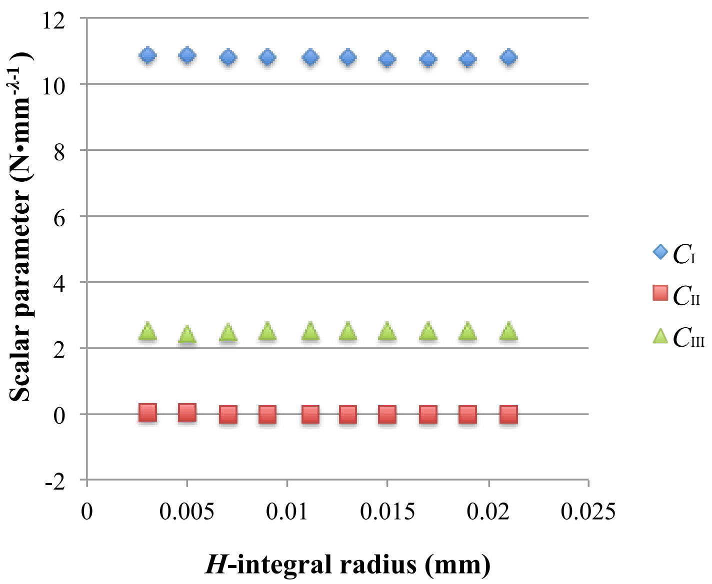

Fig. 7 Path independency of scalar parameters with the radius of H-integral (Model I, Isotropic, H-integral meshes=2000).

3・1・2　直交異方性材料と単斜晶材料の接合体の場合

図 3 中の材料 1 として直交異方性材料，材料 2 として単斜晶材料を仮定した．一様引張り $\sigma_{xx}{}^0 = 50.0$ MPa とした．用いた材料定数を表 5 に，固有値分解の結果として求めた特異性指数を表 6 に，H-integral によって求めたスカラーパラメーターを表 7 にそれぞれ示す．特異性指数 λ_m には値の小さいものから順に m = I, II, III, …と番号付けをし，スカラーパラメーターC_m も特異性指数に対応するように m = I, II, III, …と番号付けを行っている．これらの解析値は，固有値解析と H-integral のための有限要素数が 2000 のものであり，式 (8) の γ も γ= 0.001 とした．また，H-integral の積分半径は最小メッシュサイズの 10 倍程度である r = 0.015 mm とした．ここでも，λ_m が固有値のときに，$-\lambda_m-1$ も固有値となっており，表 8 に示した式(15)の値もほぼ 0 となっている．図 3 中の $\phi = \pi/4$, θ =

$\pi/4$ の位置での式(1)より求められる漸近解と FEM の結果を図 8 に示す．図 8 より，特異点に非常に近いところでは FEM 結果が誤差を含むので一致しなくなるということを除けば，漸近解と FEM がよく一致しており，精度よくスカラーパラメーターの計算を行えていると考えられる．

等方性材料の組み合わせの場合と同様に，固有値解析と *H*-integral に用いた有限要素数と特異性固有値の関係を図 9 に，スカラーパラメーターとの関係を図 10 に示した．これより，固有値解析の有限要素数を増やしても，得られた特異性固有値やスカラーパラメーターの値が変化せず安定した計算が行えていることがわかる．また，図 11 に有限要素数 2000 の場合の求めたスカラーパラメーターの経路独立性を示した．この場合も，*H*-integral の経路独立性はほぼ成立していることがわかる．

Table 5 Material properties of materials 1 and 2 in Fig. 3 (Model I, Anisotropic).

	Material 1 (Aragonite: Orthotropic)	Material 2 (GSO: Monoclinic)
C_{11} (GPa)	160	223
C_{12} (GPa)	36.6	108
C_{13} (GPa)	1.97	98.5
C_{15} (GPa)	0	8.4
C_{22} (GPa)	87	150
C_{23} (GPa)	15.9	102
C_{25} (GPa)	0	33.3
C_{33} (GPa)	85	251
C_{35} (GPa)	0	-6
C_{44} (GPa)	41.3	78.8
C_{46} (GPa)	0	6.6
C_{55} (GPa)	25.6	68.8
C_{66} (GPa)	42.7	82.7

Table 6 Obtained singular eigenvalues (FE Elements in Fig. 1= 2000, Model I, Anisotropic).

	λ_{III}^*	λ_{II}^*	λ_{I}^*		λ_{I}	λ_{II}	λ_{III}
Eigenvalues	-1.9275	-1.8385	-1.4879	-1.0000	0.4879	0.8385	0.9275

Table 7 Obtained scalar parameters (*H*-integral meshes = 2000, Model I, Anisotropic).

$(\mathrm{N \cdot mm^{-1-\lambda}})$	C_{I}	C_{II}	C_{III}
Scalar parameter	0.0463	-0.1024	0.5272

Table 8 Integrated values of Eq. (13) (*H*-integral meshes = 2000, Model I, Anisotropic).

Elements	l = I, m = II	l = I, m = III	l = II, m = I	l = II, m = III	l = III, m = I	l = III, m = II
2000	6.551×10^{-7}	1.299×10^{-7}	3.344×10^{-7}	7.878×10^{-7}	7.664×10^{-7}	4.003×10^{-7}

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]

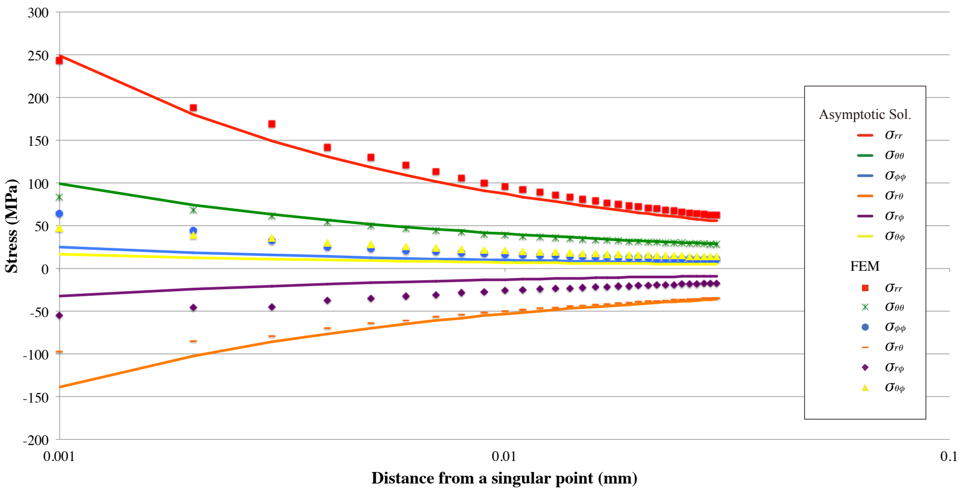

Fig. 8 Distributions of stresses at $\phi = \pi/4$, $\theta = \pi/4$ with the distance from a singular point (H-integral meshes = 2000, Model I, Anisotropic).

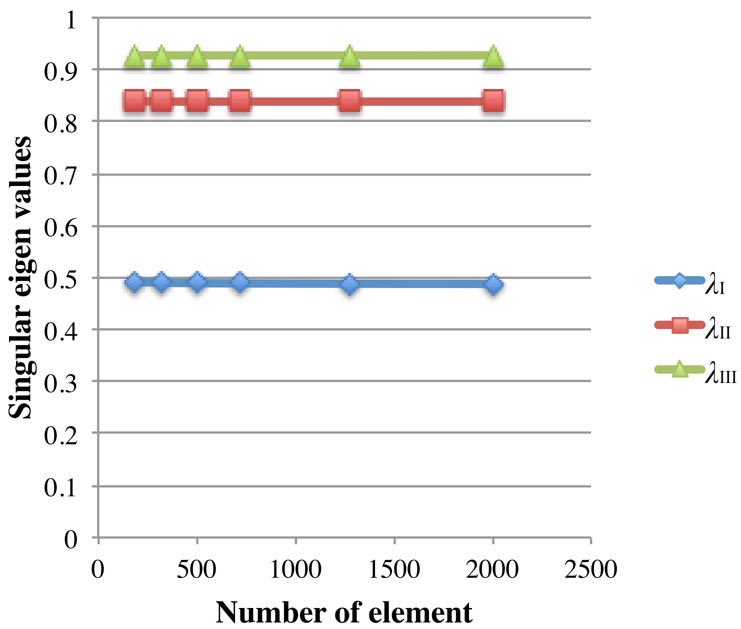

Fig. 9 Obtained singular eigenvalues with the number of FE elements in Fig. 1 (Model I, Anisotropic).

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]

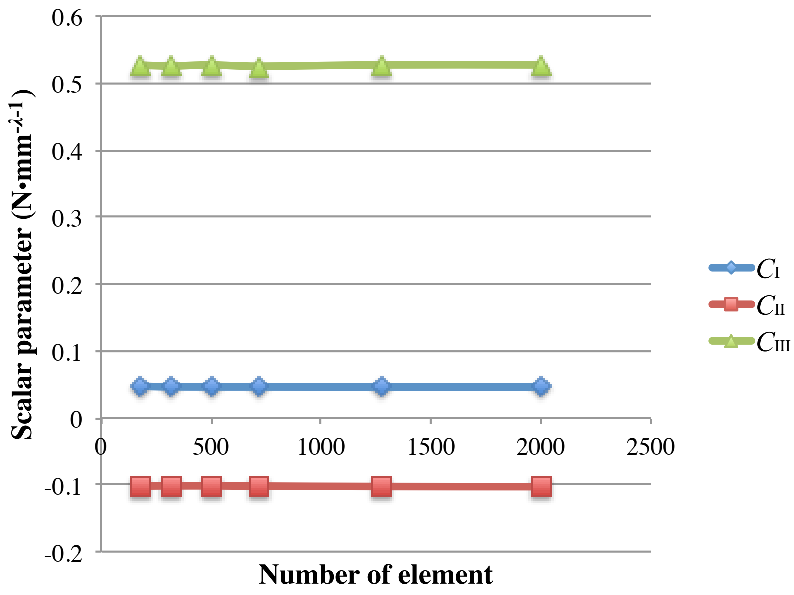

Fig. 10　Obtained scalar parameters, C_{I}, C_{II}, C_{III}, with the number of H-integral meshes (Model I, Anisotropic).

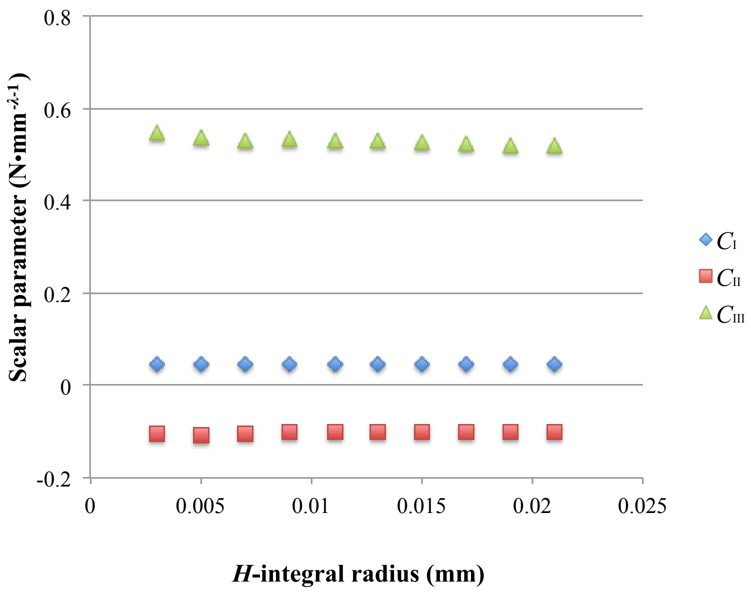

Fig. 11 Path independency of scalar parameters, C_{I}, C_{II}, C_{III}, with the radius of H-integral (Model I, Anisotropic, H-integral meshes=2000).

3・2　異種材接合角部 II

最後に解析モデルとして図 12 に示すような等方性材料の接合体に一様引張り $\sigma_{xx}^{0} = 5.0$ MPa を加えた場合を解析した．モデル形状は，$W = 1.0$ mm，$L = 1.0$ mm，及び $t = 1.0$ mm とした．用いた材料定数を表 9 に，固有値分解の結果として求めた特異性指数を表 10 に，H-integral によって求めたスカラーパラメーターを表 11 に示す．ここでは特異性指数が 1 つであることより，スカラーパラメーターも 1 つである．これらの解析値は，固有値解析と H-integral のための有限要素数が 1800 のものであり，式（8）の γ は $\gamma = 0.001$ とした．また，H-integral の積分半径

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]

は最小メッシュサイズの 10 倍程度である $r = 0.015$ mm とした．図 12 中の $\phi = \pi/4, \theta = 3\pi/4$ の位置での式(1)より求められる漸近解と FEM の結果を図 13 に示す．図 13 より，この場合も特異点に非常に近いところでは FEM 結果が誤差を含むので一致しなくなるということを除けば，漸近解と FEM がよく一致しており，精度よくスカラーパラメーターの計算を行えていると考えられる．

この場合，特異性固有値と対応したスカラーパラメーターが一対しか無いが，固有値解析と H-integral に用いた有限要素数と特異性固有値の関係を図 14 に，スカラーパラメーターとの関係を図 15 に示した．ここでも，固有値解析の有限要素数を増やしても，得られた特異性固有値やスカラーパラメーターの値が変化せず安定した計算が行えていることがわかる．また，図 16 に求めたスカラーパラメーターの経路独立性を示す．この場合も，H-integral の経路独立性は良好であることがわかる．

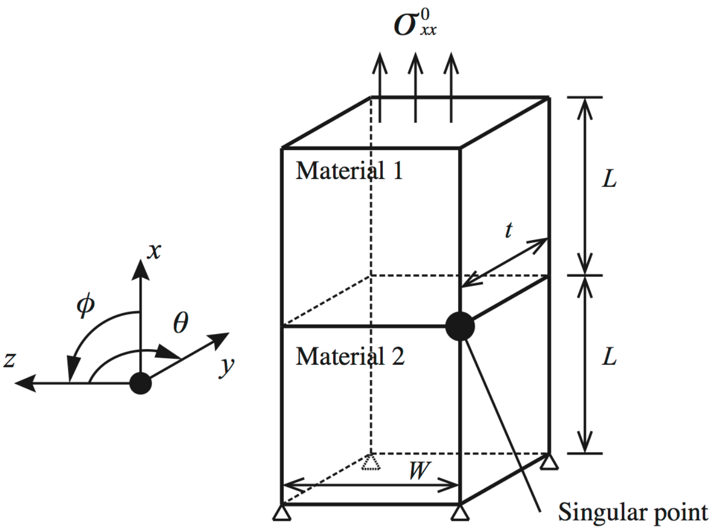

Fig. 12　Schematic of an analysis model (Model II).

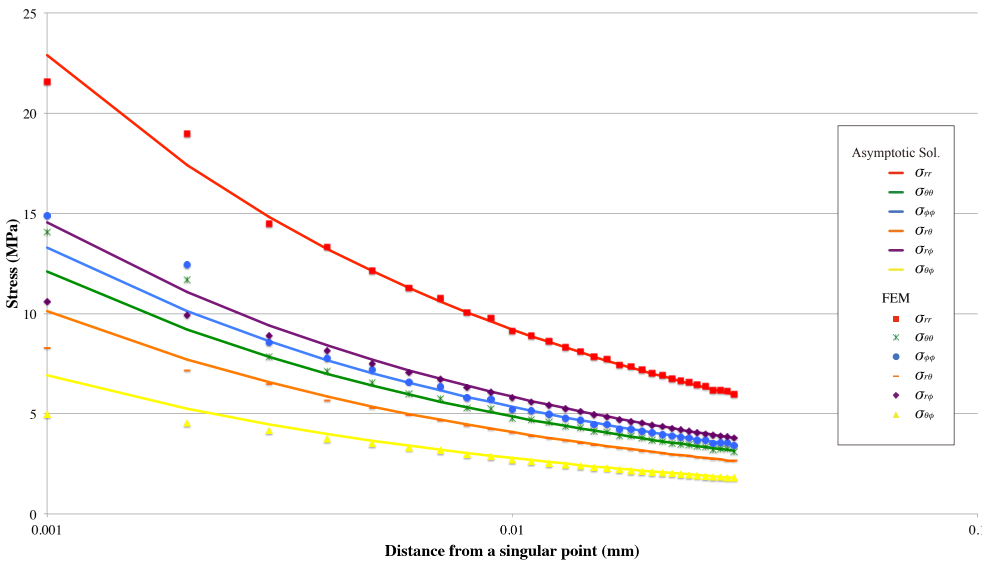

Fig. 13　Distributions of stresses at $\phi = \pi/4$, $\theta = 3\pi/4$ with the distance from a singular point (Model II, H-integral meshes = 1800).

Table 9 Material properties of materials 1 and 2 in Fig. 12 (Model II).

Material		1 (Si)	2 (Resin)
Young's modulus	E (GPa)	166	2.74
Poisson's ratio	v	0.26	0.38

Table 10 Obtained eigenvalues (Model II, Fe elements in Fig. 1 = 1800).

	λ_{I}^{*}		λ_{I}
Eignenvalues	-1.6046	-1.0000	0.6046

Table 11 Obtained scalar parameter (Model II, H-integral meshes= 1800).

$(\mathrm{N \cdot mm^{-1-\lambda}})$	C_{I}
Scalar parameter	-0.4457

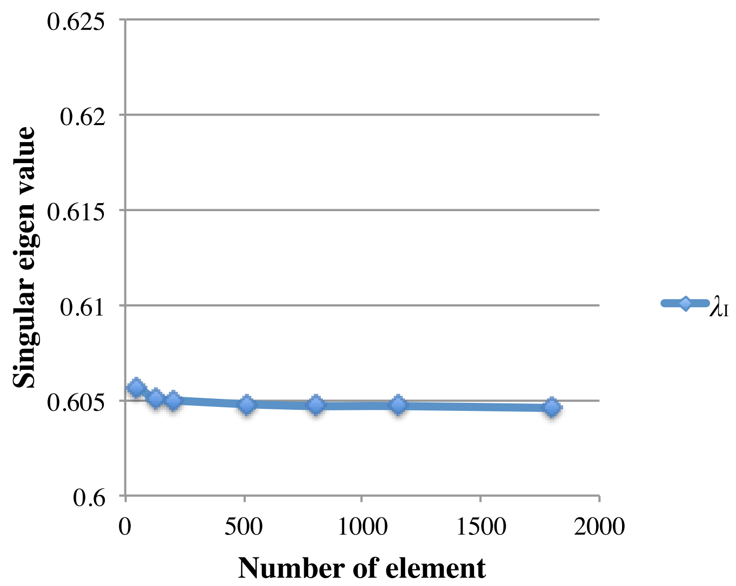

Fig. 14 Obtained singular eigenvalues with the number of FE elements in Fig. 1 (Model II).

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]

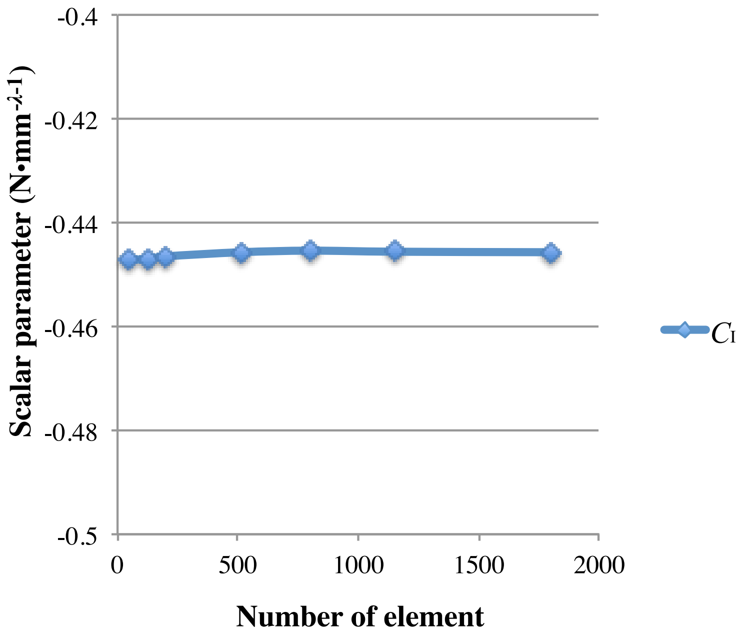

Fig. 15 Obtained scalar parameter with the number of *H*-integral meshes (Model II).

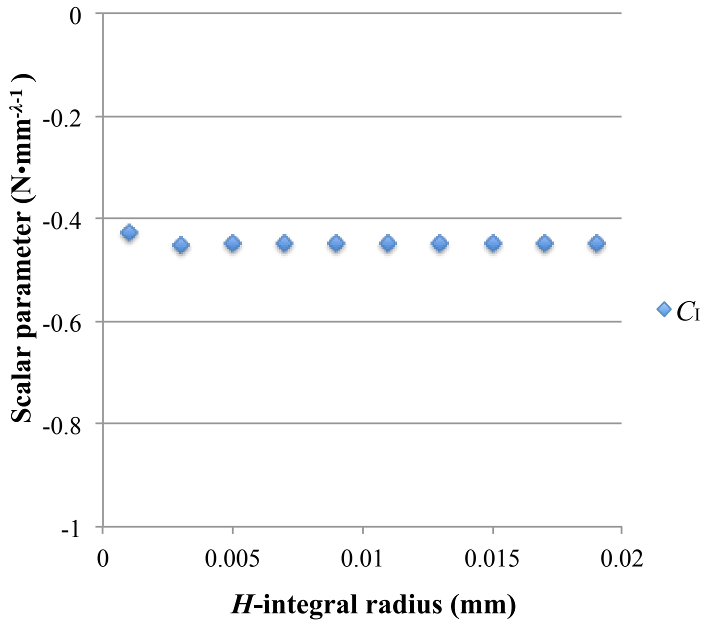

Fig. 16 Path independency of a scalar parameter with the radius of *H*-integral (Model II, *H*-integral meshes= 1800).

4. 結　　言

本研究では Pageau らによる有限要素解析の手法を用いることで異種材接合角部の三次元角部での特異性指数の解析を行った. さらに Williams の固有値展開法と Pageau らによる有限要素解析の手法を組み合わせて *H*-integral を行い，スカラーパラメーターの計算を行った．この際に $0<\lambda<1$ の範囲にある応力が特異性を示す固有値に対して，$-\lambda-1$ を補助解に用いることで，*H*-integral により有効にスカラーパラメーターを求めることができた．この方法は，基本的に(Luangarpa and Koguchi, 2014) の手法と同様であるが，この論文ではスカラーパラメーターが単一実数の場合しか求められなかったものを，本研究では複数のスカラーパラメーターを同時に *H*-integral で計算する手法に拡張し，その有効性を半解析的に証明した.

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]

また，これまで計算により得られたスカラーパラメーターは固有値解析の有限要素数を増やすことで変化していたが，式（8）で固有ベクトルを一意的に定義することで，一定値に収束する安定したスカラーパラメーターの計算を行えることを示した．このことで，スカラーパラメーターを破壊力学パラメーターに結びつける基礎が確立した．さらに求めたスカラーパラメーターより得られる漸近解を角部近傍を十分に細かく要素分割した有限要素法より求めた応力場と比較すると，有限要素法の精度が低下すると考えられる三次元角部のごく近傍を除いて，両者は良く一致しており，求めたスカラーパラメーターの精度の良さを間接的に示している．このように三次元角部周りの複雑な応力場を数個のスカラーパラメーターで記述できるようになったことにより，三次元角部からの破壊を定量的に評価するための基礎的な手法が確立できたと考えられる．

文　献

Banks-Sills, L. and Ishbir, C., A conservative integral for bimaterials notches subjected to thermal stresses, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.60 (2004), pp.1075–1102.

Carpenter, W.C., Calculation of fracture mechanics parameters for a general corner, International Journal of Fracture, Vol. 24 (1984), pp. 45-58.

Hwu, C. and Kuo, T. L., A unified definition for stress intensity factors of interface corners and cracks, International Journal of Solids and Structures, Vol.44 (2007), pp.6340–6359.

Hwu, C., Omiya, M. and Kishimoto, K., A key matrix $\hat{\mathrm{N}}$ for the stress singularity of the anisotropic elastic composite wedges, Japan Society of Mechanical Engineers International Journal Series A, Vol.46 (2003), pp.40–50.

池田徹，田口陽介，宮崎則幸，*H*-integral による三次元異方性異種接合角部のスカラーパラメーターの解析，M&M 材料力学カンファレンス講演論文集 (2013), OS0101.

Koguchi, H. and Muramoto, T., The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints, International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, No. 35 (2000), pp. 4737-4762.

Labossiere, P. E. W. and Dunn, M. L., Stress interface corners in anisotropic bimaterials, Engineering Fracture Mechanics, Vol.62 (1999), pp.555–575.

Luangarpa, C. and Koguchi, H., Analysis of a three-dimensional dissimilar material joint with one real singularity using a conservative integral, International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, No. 15-16 (2014), pp. 2908-2919.

Munz, D., Fett, T. and Yang, Y. Y., The regular stress term in bonded dissimilar materials after a change in temperature, Engineering Fracture Mechanics, Vol.44 (1993), pp.185–194.

Nomura, Y., Ikeda, T. and Miyazaki, N., Stress intensity factor analysis of a three-dimensional interfacial corner between anisotropic bimaterials under thermal stress, International Journal of Solids and Structures, Vol. 47 (2010), pp. 1775-1784.

Nomura, Y., Ikeda, T. and Miyazaki, N., Stress intensity factor analysis at an interfacial corner between anisotropic bimaterials under thermal stress, Engineering Fracture Mechanics, Vol.76 (2009), pp221–235.

Pageau, S. S. and Biggers, S. B., Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.38 (1995), pp.2225–2239.

Sinclair, G.B., Okajima, M. and Griffin, J.H., Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20 (1984), pp. 999-1008.

Stern, M., Becker, E.B. and Dunham, R.S., A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors, International Journal of Fracture, Vol. 12 (1976), pp. 359-368.

Williams, M.L., Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, Vol. 19 (1952), pp. 526-528.

Williams, M.L., On the stress distribution at the base of a stationary crack, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, Vol. 24 (1957), pp. 109-114.

Wu, K.C. and Chang, F.T., Near-tip fields in a notched body with dislocations and body forces, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, Vol. 60 (1993), pp. 936-941.

References

Banks-Sills, L. and Ishbir, C., A conservative integral for bimaterials notches subjected to thermal stresses, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.60 (2004), pp.1075–1102.

Carpenter, W.C., Calculation of fracture mechanics parameters for a general corner, International Journal of Fracture, Vol. 24 (1984), pp. 45-58.

Hwu, C. and Kuo, T. L., A unified definition for stress intensity factors of interface corners and cracks, International Journal of Solids and Structures, Vol.44 (2007), pp.6340–6359.

Hwu, C., Omiya, M. and Kishimoto, K., A key matrix $\hat{\mathrm{N}}$ for the stress singularity of the anisotropic elastic composite wedges, Japan Society of Mechanical Engineers International Journal Series A, Vol.46 (2003), pp.40–50.

Ikeda, T., Taguchi, Y. and Miyazaki, N., Analysis of scholar parameters at three dimensional jointed corners among anisotropic dissimilar materials using the H-integral, Proceedings of JSME M&M conference 2013 (2013), OS0101, (in Japanese).

Koguchi, H. and Muramoto, T., The order of stress singularity near the vertex in three-dimensional joints, International Journal of Solids and Structures, Vol. 37, No. 35 (2000), pp. 4737-4762.

Labossiere, P. E. W. and Dunn, M. L., Stress interface corners in anisotropic bimaterials, Engineering Fracture Mechanics, Vol.62 (1999), pp.555–575.

Luangarpa, C. and Koguchi, H., Analysis of a three-dimensional dissimilar material joint with one real singularity using a conservative integral, International Journal of Solids and Structures, Vol. 51, No. 15-16 (2014), pp. 2908-2919.

Munz, D., Fett, T. and Yang, Y. Y., The regular stress term in bonded dissimilar materials after a change in temperature, Engineering Fracture Mechanics, Vol.44 (1993), pp.185–194.

Nomura, Y., Ikeda, T. and Miyazaki, N., Stress intensity factor analysis of a three-dimensional interfacial corner between anisotropic bimaterials under thermal stress, International Journal of Solids and Structures, Vol. 47 (2010), pp. 1775-1784.

Nomura, Y., Ikeda, T. and Miyazaki, N., Stress intensity factor analysis at an interfacial corner between anisotropic bimaterials under thermal stress, Engineering Fracture Mechanics, Vol.76 (2009), pp221–235.

Pageau, S. S. and Biggers, S. B., Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.38 (1995), pp.2225–2239.

Sinclair, G.B., Okajima, M. and Griffin, J.H., Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20 (1984), pp. 999-1008.

Stern, M., Becker, E.B. and Dunham, R.S., A contour integral computation of mixed-mode stress intensity factors, International Journal of Fracture, Vol. 12 (1976), pp. 359-368.

Williams, M.L., Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, Vol. 19 (1952), pp. 526-528.

Williams, M.L., On the stress distribution at the base of a stationary crack, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, Vol. 24 (1957), pp. 109-114.

Wu, K.C. and Chang, F.T., Near-tip fields in a notched body with dislocations and body forces, Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME, Vol. 60 (1993), pp. 936-941.

[DOI: 10.1299/transjsme.16-00382]