

# 三次元異方性異種材接合角部の 特異応力場解析

---

鹿児島大学 理工学研究科  
機械工学専攻 池田研究室  
修士2年 古賀裕二

# 本発表の流れ

---

- 研究背景・目的
- 解析理論
- 解析条件・結果
- 結言

# 本発表の流れ

---

- 研究背景・目的
- 解析理論
- 解析条件・結果
- 結言

# 研究背景

近年、電子デバイスなどの小型化・高機能化

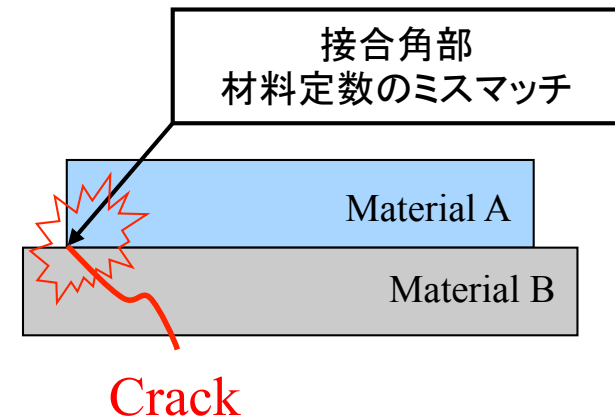


様々な材料, 要素を接合・積層することで実現



多数の**接合界面角部**が生じる

電子デバイスだけでなく,  
建造物などにも接合界面角部は存在



## 接合界面角部

材料定数の違いにより応力集中が生じ破壊の起点となりやすい

→ **応力の特異点**となる

破壊挙動評価のために

接合角部での  
特異応力場を評価する  
手法の確立が必要

# 研究目的

## 先行研究

三次元角部での応力特異性強度を表す  
スカラーパラメーターの解析手法を開発<sup>[1]</sup>

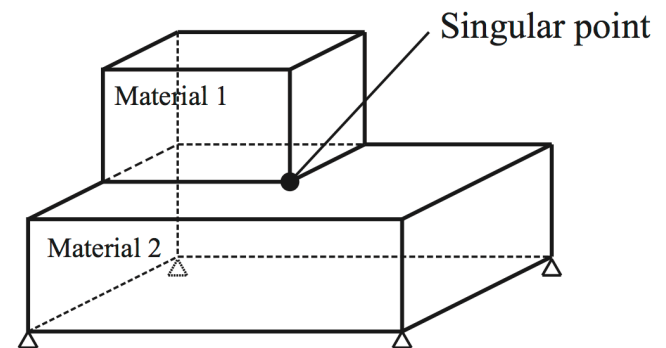
しかし・・・

- 解析精度の悪い形状の存在
- 固有値解析のための有限要素数の変化によるスカラーパラメーターの変動
- 熱応力問題に非対応

などの問題点があり、まだ発展段階にあった

## 本研究の目的

これらの問題を解決した、より一般性の高い  
解析手法の開発



# 本発表の流れ

---

- 研究背景・目的
- **解析理論**
- 解析条件・結果
- 結言

# 特異応力場の評価

## Williamsの固有値展開法<sup>[1]</sup>

応力

$$\sigma_{ij}^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi)$$

$\lambda_m$  : 特異性固有値  
⇒ 材料定数と角部の形状で決定

$f_{ij}^{mk}(\theta, \phi), g_i^{mk}(\theta, \phi)$  : 固有関数  
⇒ 各 $\lambda_m$ に対応して求まる

変位

$$u_i^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m} g_i^{mk}(\theta, \phi)$$

N : 特異性固有値の数

$C_m$  : スカラーパラメーター  
⇒ H-integralを用いて計算

$k$  : 材料の種類,  $r$  : 特異点からの距離

[1] Munz et al., *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 44, (1993), pp. 185-194.

# 本研究の流れ

## Williamsの固有値展開法<sup>[1]</sup>

$$\sigma_{ij}^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi)$$

$$u_i^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m} g_i^{mk}(\theta, \phi)$$

特異応力パラメーター

$\lambda_m$  : 特異性固有値

$f_{ij}^{mk}(\theta, \phi), g_i^{mk}(\theta, \phi)$  : 固有関数

$C_m$  : スカラーパラメーター

Step.1 特異性固有値 $\lambda$ を求める



Step.2 固有関数を定義する



Step.3  $H$ -integralによりスカラーパラメーターを計算する



# 本研究の流れ

## Williamsの固有値展開法<sup>[1]</sup>

$$\sigma_{ij}^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi)$$

$$u_i^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m} g_i^{mk}(\theta, \phi)$$

特異応力パラメーター

$\lambda_m$  : 特異性固有値

$f_{ij}^{mk}(\theta, \phi), g_i^{mk}(\theta, \phi)$  : 固有関数

$C_m$  : スカラーパラメーター

Step.1 特異性固有値 $\lambda$ を求める



Step.2 固有関数を定義する



Step.3  $H$ -integralによりスカラーパラメーターを計算する

[1] Munz et al., *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 44, (1993), pp. 185-194.

# Step.1 特異性固有値 $\lambda$ を求める

右図に示すような特異点 $o$ 周りの有限要素法解析を行う<sup>[1]</sup>

$$\bar{u} = \rho^\lambda \left[ \sum_{i=1}^8 H_i \bar{u}_i \right] \quad \begin{array}{l} \bar{u} : \text{要素内変位} \\ \bar{u}_i : \text{節点変位} \end{array}$$



有限要素式

$$(\lambda^2[A] + \lambda[B] + [C])\{\bar{U}\} = 0$$



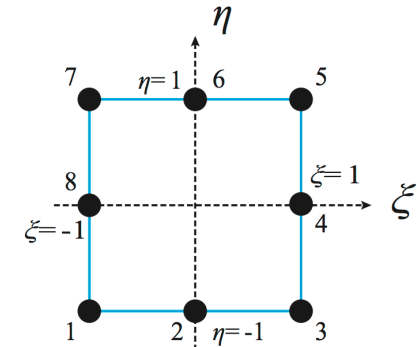
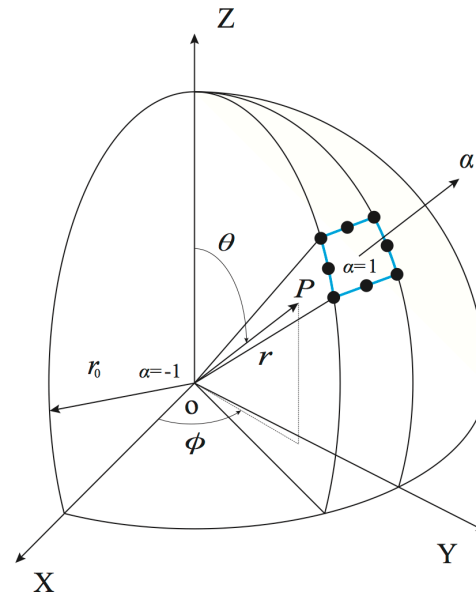
$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \lambda \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix}$$

$[A],[B],[C]$ は有限要素法により求まる  
行列 $\{\bar{U}\}$ は節点変位のベクトル

特異項のみに着目  
 $0 < \text{Re}[\lambda] < 1$



[1] Pageau et al., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, (1995), pp. 2225-2239.

# Step.1 特異性固有値 $\lambda$ を求める

スパーズ行列の一般化固有値問題

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \lambda \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{U}\} : \text{節点変位のベクトル}$$

スカラー倍の無数の解を持つ  $\Rightarrow$  **スカラーパラメーターも無数の解**



$$\frac{\int |g_i^{mk}(\theta, \phi)|^2 dS}{\int \gamma dS} = 1 \quad \gamma : \text{特異点からの距離}$$

**節点変位を正規化し、スカラーパラメーターを計算**

# 本研究の流れ

## Williamsの固有値展開法<sup>[1]</sup>

$$\sigma_{ij}^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi)$$

$$u_i^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m} g_i^{mk}(\theta, \phi)$$

特異応力パラメーター

$\lambda_m$  : 特異性固有値

$f_{ij}^{mk}(\theta, \phi), g_i^{mk}(\theta, \phi)$  : 固有関数

$C_m$  : スカラーパラメーター

Step.1 特異性固有値 $\lambda$ を求める



Step.2 固有関数を定義する



Step.3  $H$ -integralによりスカラーパラメーターを計算する

## Step.2 固有関数を定義する

### 特異性固有値の有限要素解析<sup>[1]</sup>より

#### 要素内点の応力

$$\bar{\sigma}_m = \frac{1}{r_0} \rho^{\lambda_m - 1} [D] \left[ \sum_{i=1}^8 (\lambda_m [B_{ia}] + [B_{ib}]) \bar{u}_i \right]$$

#### 要素内点の変位

$$\bar{u}_m = \rho^{\lambda_m} \left[ \sum_{i=1}^8 H_i \bar{u}_i \right]$$

$\bar{u}_i$  : 節点変位     $H_i$  : 内挿関数     $D$  : 弾性定数     $r_0$  : 球の半径     $\rho = r / r_0$

ひずみ-変位マトリックス  $\Rightarrow [B_i] = 1/r_0 \rho^{\lambda_m - 1} (\lambda_m [B_{ia}] + [B_{ib}])$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \lambda \begin{Bmatrix} \bar{V} \\ \bar{U} \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow$  固有ベクトルとして正規化された節点変位  $\bar{U}_i$  が得られる  
 $\Rightarrow$  ある定数  $a_m$  を掛けて節点変位が得られる  $\bar{u}_i = a_m \bar{U}_i$

$$\bar{\sigma}_m = a_m \frac{1}{r_0} \rho^{\lambda_m - 1} [D] \left[ \sum_{i=1}^8 (\lambda_m [B_{ia}] + [B_{ib}]) \bar{U}_i \right]$$

$$\bar{u}_m = a_m \rho^{\lambda_m} \left[ \sum_{i=1}^8 H_i \bar{U}_i \right]$$

[1] Pageau et al., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, (1995), pp. 2225-2239.

## Step.2 固有関数を定義する

特異性固有値の有限要素解析<sup>[1]</sup>より

$$\bar{\sigma}_m = a_m \frac{1}{r_0} \rho^{\lambda_m - 1} [D] \left[ \sum_{i=1}^8 (\lambda_m [B_{ia}] + [B_{ib}]) \bar{U}_i \right] \quad \bar{u}_m = a_m \rho^{\lambda_m} \left[ \sum_{i=1}^8 H_i \bar{U}_i \right]$$

Williamsの固有値展開法<sup>[2]</sup>より

$$\sigma = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f^m(\theta, \phi) = \sum_{m=1}^N \bar{\sigma}_m \quad u = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m} g^m(\theta, \phi) = \sum_{m=1}^N \bar{u}_m$$

式の比較により固有関数を定義

$$f^m(\theta, \phi) = [D] \left[ \sum_{i=1}^8 (\lambda_m B_{ia} + B_{ib}) \bar{U}_i \right]$$

$$g^m(\theta, \phi) = \left[ \sum_{i=1}^8 H_i \bar{U}_i \right]$$

応力・変位場の分布形状を表し、特異点からの距離  $r$  に依存しない

[1] Pageau et al., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, (1995), pp. 2225-2239.

[2] Munz et al., *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 44, (1993), pp. 185-194.

# 本研究の流れ

## Williamsの固有値展開法<sup>[1]</sup>

$$\sigma_{ij}^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi)$$

$$u_i^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m} g_i^{mk}(\theta, \phi)$$

特異応力パラメーター

$\lambda_m$  : 特異性固有値

$f_{ij}^{mk}(\theta, \phi), g_i^{mk}(\theta, \phi)$  : 固有関数

$C_m$  : スカラーパラメーター

Step.1 特異性固有値 $\lambda$ を求める



Step.2 固有関数を定義する



Step.3  $H$ -integralによりスカラーパラメーターを計算する

### Step.3 $H$ -integralによりスカラーパラメーター $C_m$ を計算する

#### Bettiの相反定理

第1番目の応力が第2番目の変位にする仕事は、  
 第2番目の応力が第1番目の変位にする仕事と等しい

$$\int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* - \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}) dV = \int_V (\sigma_{ij} u_{i,j}^* - \sigma_{ij}^* u_{i,j}) dV + \int_V (s_i u_i^* - s_i^* u_i) dV = 0$$

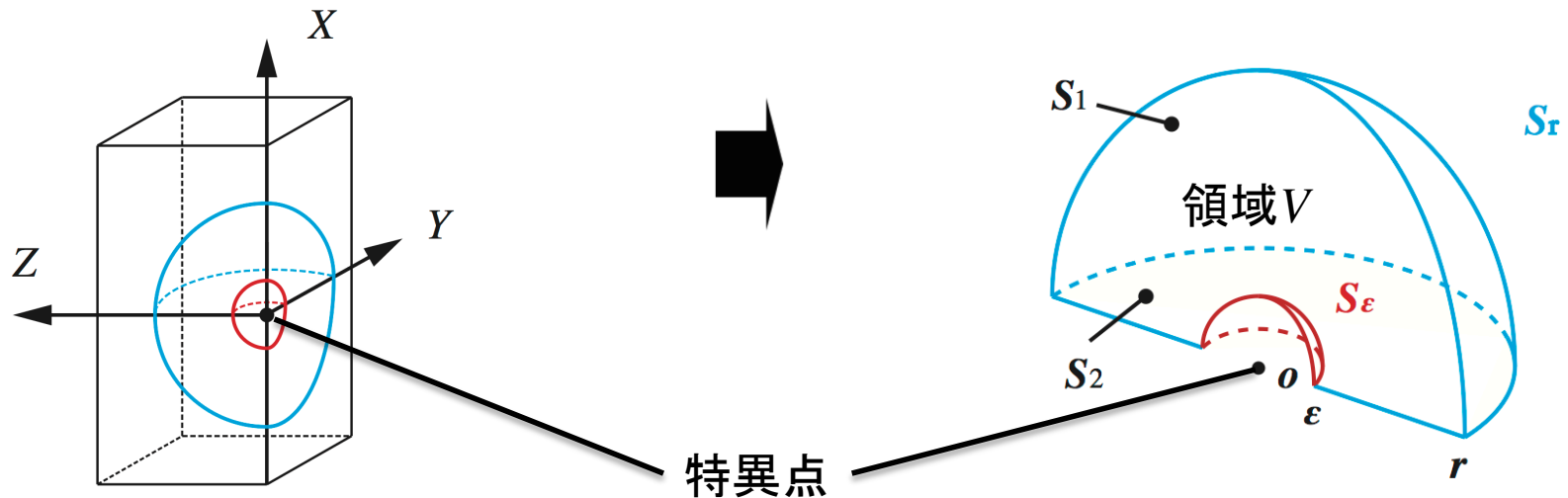
$\xrightarrow{\text{Gaussの発散定理}}$

$$\int_S (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS + \int_V (s_i u_i^* - s_i^* u_i) dV = 0$$

$\sigma_{ij}$  : 応力,  $u_i$  : 変位,  $s_i$  : 物体力

\*なし→解析対象の値

\*あり→補助場の値



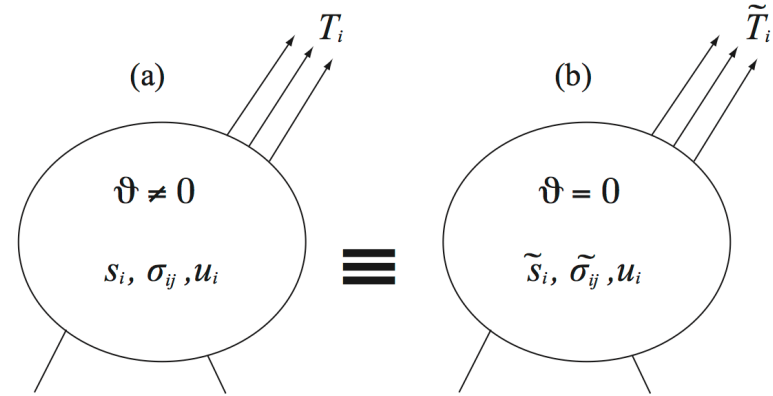


### Step.3 $H$ -integralによりスカラーパラメーター $C_m$ を計算する

**Body force analogy<sup>[1]</sup>**を用いて温度分布の存在しない応力場に置き換える

$$\begin{aligned} \tilde{s}_i &= s_i - \beta_{ij} \vartheta_{,j} \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij} + \beta_{ij} \vartheta, \quad \beta_{ij} = C_{ijkl} \alpha_{kl} \\ \tilde{T}_i &= T_i + \beta_{ij} \vartheta n_j \end{aligned}$$

$T_i$  : 引張力  
 $\vartheta$  : 温度分布  
 $\alpha_{ij}$  : 線膨張係数 (CTE)



熱応力問題でのBettiの相反定理

$$\int_S (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS + \int_S \beta_{ij} (\vartheta u_i^* - \vartheta^* u_i) n_j dS - \int_V \beta_{ij} (\vartheta_{,j} u_i^* - \vartheta_{,j}^* u_i) dV = 0$$

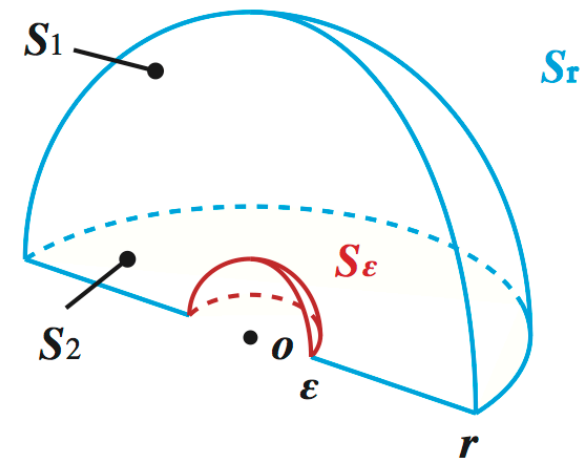
Gaussの発散定理を用いて体積分に変換

$$\int_S (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS + \int_V \beta_{ij} (\vartheta \varepsilon_{ij}^* - \vartheta^* \varepsilon_{ij}) dV = 0$$

補助場は任意  $\Rightarrow \vartheta^* = 0$

$$\int_S (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS + \int_V \beta_{ij} \vartheta \varepsilon_{ij}^* dV = 0$$

右図に示す積分領域を選択



[1] Boley B.A., Weiner J.H., Wiley : New York, (1962).

Step.3  $H$ -integralによりスカラーパラメーター $C_m$ を計算する

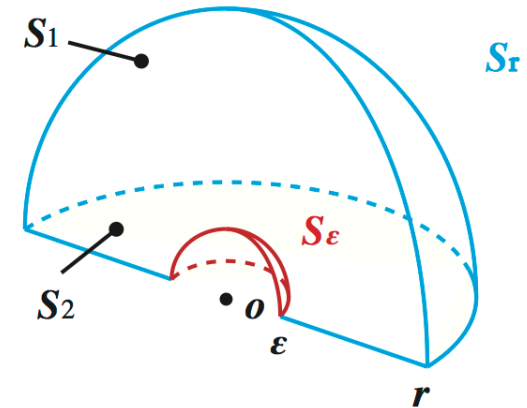
$$\int_S (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS = \int_{S_1 + S_2 + (-S_\varepsilon) + S_r} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS$$

↓  $S_1, S_2$ は自由表面  $\Rightarrow$  積分値は0

$$\int_{S_\varepsilon} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS_\varepsilon = \int_{S_r} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS_r + \int_V \beta_{ij} \vartheta \varepsilon_{ij}^* dV$$

↓  $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときの  $S_\varepsilon$ での積分値を  $H$ と定義

$$H \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS_\varepsilon + \int_V \beta_{ij} \vartheta \varepsilon_{ij}^* dV$$



三次元機械荷重問題の $H$ -integral

$$H = \int_{S_r} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) dS_r$$

$S_1, S_2$ が自由表面でない場合も補助場をそれぞれの境界条件を満たすように選択することで、同様の式を導くことができる

三次元熱応力問題の $H$ -integral

$$H = \int_{S_r} (\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) dS_r + \int_V \beta_{ij} \vartheta \varepsilon_{ij}^* dV$$

## Step.3 $H$ -integralによりスカラーパラメーター $C_m$ を計算する

### 補助場の選択

$H$ -integralよりスカラーパラメーター $C_m$ を求めるためには適切な補助場の選択が必要

#### 解析対象

- 半径 $\varepsilon$ の面積(内側)  
⇒ 特異点近傍の漸近解
- 半径 $r$ の面積(外側)  
⇒ 有限要素法解析結果

#### 補助場

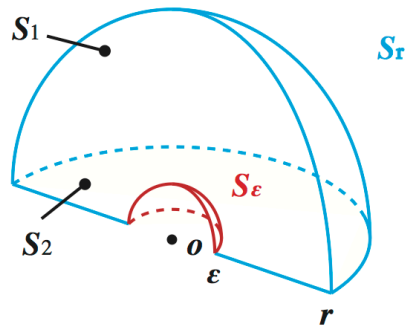
特異性を相殺するため  $\lambda \rightarrow -\lambda - 1$  とする<sup>[1][2]</sup>

$$\sigma_{ij}^* = C_m^* r^{-\lambda_m - 2} f_{ij}^{m*}(\theta, \phi), \quad f_{ij}^{m*}(\theta, \phi) = [D] \left[ \sum_{i=1}^8 ((-\lambda_m - 1) B_{ia} + B_{ib}) \bar{u}_i \right]$$

$$u_i^* = C_m^* r^{-\lambda_m - 1} g_i^{m*}(\theta, \phi), \quad g_i^{m*}(\theta, \phi) = g_i^m(\theta, \phi)$$

$$\frac{1}{C_m^*} = \iint (f_{ij}^m(\theta, \phi) g_i^{m*}(\theta, \phi) - f_{ij}^{m*}(\theta, \phi) g_i^m(\theta, \phi)) n_j \sin \theta d\theta d\phi$$

補助場をこのように選択することにより,  $H$ -integralの左辺はスカラーパラメーターと等しくなることが導かれる



$$H = \int_{S_r} (\sigma_{ij}^* u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) dS_r = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} (\sigma_{ij}^* u_i^* - \sigma_{ij}^* u_i) n_j dS_\varepsilon = C_m$$

全てのスカラーパラメーターを求めるには  
各固有値ごとに評価する必要がある

[1] Lee et al., *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, (2003), pp. 825-850.

[2] Koguchi et al., *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 51, (2004), pp. 2908-2919.

### Step.3 $H$ -integralによりスカラーパラメーター $C_m$ を計算する

$$\boxed{m = \text{I} \text{ のとき}} \quad \sigma_{ij}^k = \sum_{m=\text{I}}^{\text{N}} C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi) \quad u_i^k = \sum_{m=\text{I}}^{\text{N}} C_m r^{\lambda_m} g_i^{mk}(\theta, \phi) \quad \lambda_{\text{I}} < \lambda_{\text{II}} < \lambda_{\text{III}}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{I}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint (\sigma_{rr} u_r^* + \sigma_{r\theta} u_\theta^* + \sigma_{r\phi} u_\phi^* - \sigma_{rr}^* u_r - \sigma_{r\theta}^* u_\theta - \sigma_{r\phi}^* u_\phi) n_r \varepsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \{ C_{\text{I}} C_{\text{I}}^* (f_{rr}^{\text{I}}(\theta, \phi) g_r^{\text{I}*}(\theta, \phi) + f_{r\theta}^{\text{I}}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{I}*}(\theta, \phi) + f_{r\phi}^{\text{I}}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{I}*}(\theta, \phi) \\ &\quad - f_{rr}^{\text{I}*}(\theta, \phi) g_r^{\text{I}}(\theta, \phi) - f_{r\theta}^{\text{I}*}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{I}}(\theta, \phi) - f_{r\phi}^{\text{I}*}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{I}}(\theta, \phi)) \\ &\quad + C_{\text{II}} C_{\text{I}}^* \varepsilon^{\lambda_{\text{II}} - \lambda_{\text{I}}} (f_{rr}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_r^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\theta}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\phi}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{II}*}(\theta, \phi) \\ &\quad - f_{rr}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_r^{\text{II}}(\theta, \phi) - f_{r\theta}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{II}}(\theta, \phi) - f_{r\phi}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{II}}(\theta, \phi)) \\ &\quad + C_{\text{III}} C_{\text{I}}^* \varepsilon^{\lambda_{\text{III}} - \lambda_{\text{I}}} (f_{rr}^{\text{III}}(\theta, \phi) g_r^{\text{III}*}(\theta, \phi) + f_{r\theta}^{\text{III}}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{III}*}(\theta, \phi) + f_{r\phi}^{\text{III}}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{III}*}(\theta, \phi) \\ &\quad - f_{rr}^{\text{III}*}(\theta, \phi) g_r^{\text{III}}(\theta, \phi) - f_{r\theta}^{\text{III}*}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{III}}(\theta, \phi) - f_{r\phi}^{\text{III}*}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{III}}(\theta, \phi)) \} n_r \sin \theta d\theta d\phi \\ &= C_{\text{I}} C_{\text{I}}^* \iint f_{rr}^{\text{I}}(\theta, \phi) g_r^{\text{I}*}(\theta, \phi) + f_{r\theta}^{\text{I}}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{I}*}(\theta, \phi) + f_{r\phi}^{\text{I}}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{I}*}(\theta, \phi) \\ &\quad - f_{rr}^{\text{I}*}(\theta, \phi) g_r^{\text{I}}(\theta, \phi) - f_{r\theta}^{\text{I}*}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{I}}(\theta, \phi) - f_{r\phi}^{\text{I}*}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{I}}(\theta, \phi) n_r \sin \theta d\theta d\phi \longrightarrow \frac{1}{C_{\text{I}}^*} \\ &= C_{\text{I}} \end{aligned}$$

### Step.3 $H$ -integralによりスカラーパラメーター $C_m$ を計算する

$m = I$  以外のとき

$$\lambda_I < \lambda_{II} < \lambda_{III}$$

$\varepsilon^{\lambda_I - \lambda_{II}} : \varepsilon \rightarrow 0$ で発散する

$$\begin{aligned}
 H_{II} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint (\sigma_{rr} u_r^* + \sigma_{r\theta} u_\theta^* + \sigma_{r\phi} u_\phi^* - \sigma_{rr}^* u_r - \sigma_{r\theta}^* u_\theta - \sigma_{r\phi}^* u_\phi) n_r \varepsilon^2 d\theta d\phi \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \{ C_I C_{II}^* \varepsilon^{\lambda_I - \lambda_{II}} (f_{rr}^I(\theta, \phi) g_r^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\theta}^I(\theta, \phi) g_\theta^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\phi}^I(\theta, \phi) g_\phi^{\text{II}*}(\theta, \phi) \\
 &\quad - f_{rr}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_r^I(\theta, \phi) - f_{r\theta}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\theta^I(\theta, \phi) - f_{r\phi}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\phi^I(\theta, \phi)) \\
 &\quad + C_{II} C_{II}^* (f_{rr}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_r^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\theta}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\phi}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{II}*}(\theta, \phi) \\
 &\quad - f_{rr}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_r^{\text{II}}(\theta, \phi) - f_{r\theta}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{II}}(\theta, \phi) - f_{r\phi}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{II}}(\theta, \phi)) \\
 &\quad + C_{III} C_{II}^* \varepsilon^{\lambda_{III} - \lambda_{II}} (f_{rr}^{\text{III}}(\theta, \phi) g_r^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\theta}^{\text{III}}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\phi}^{\text{III}}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{II}*}(\theta, \phi) \\
 &\quad - f_{rr}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_r^{\text{III}}(\theta, \phi) - f_{r\theta}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{III}}(\theta, \phi) - f_{r\phi}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{III}}(\theta, \phi)) \} n_r \sin\theta d\theta d\phi \\
 &= C_{II} C_{II}^* \iint \{ f_{rr}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_r^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\theta}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{II}*}(\theta, \phi) + f_{r\phi}^{\text{II}}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{II}*}(\theta, \phi) \\
 &\quad - f_{rr}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_r^{\text{II}}(\theta, \phi) - f_{r\theta}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\theta^{\text{II}}(\theta, \phi) - f_{r\phi}^{\text{II}*}(\theta, \phi) g_\phi^{\text{II}}(\theta, \phi) \} n_r \sin\theta d\theta d\phi \\
 &= C_{II}
 \end{aligned}$$

要確認

$$\iint (f_{ij}^l(\theta, \phi) g_i^{m*}(\theta, \phi) - f_{ij}^{m*}(\theta, \phi) g_i^l(\theta, \phi)) \sin\theta d\theta d\phi = 0, \quad l \neq m$$

# 本発表の流れ

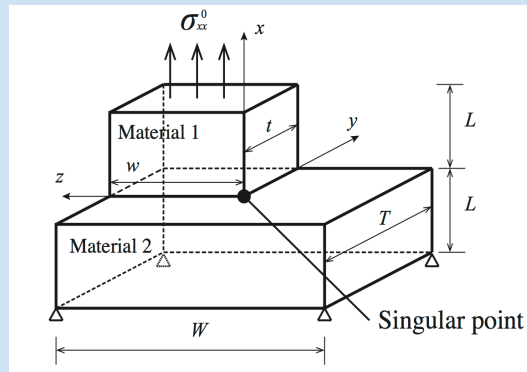
---

- 研究背景・目的
- 解析理論
- **解析条件・結果**
- 結言

# 解析条件

## 三次元機械荷重問題

### 異種材接合角部モデル

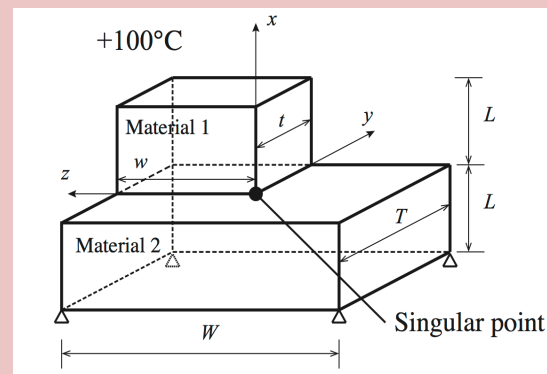


- ・モデル形状  
 $W = T = 2.0 \text{ mm}$   
 $L = w = t = 1.0 \text{ mm}$
- ・FEM解析条件  
 $\sigma_{xx}^0 = 50.0 \text{ MPa}$   
節点数 : 390,959  
要素数 : 94,000  
最小メッシュサイズ: 0.001 mm

### 2種類の解析

- ①材料がともに等方性材料の場合
- ②直交異方性材料と単斜晶系材料の接合体の場合

## 三次元熱応力問題



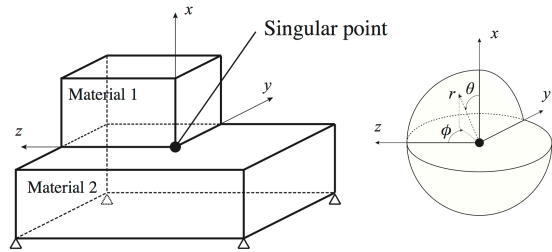
- ・モデル形状  
 $W = T = 2.0 \text{ mm}$   
 $L = w = t = 1.0 \text{ mm}$
- ・FEM解析条件  
 $\vartheta^0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$   
節点数 : 390,959  
要素数 : 94,000  
最小メッシュサイズ: 0.001 mm

### 2種類の解析

- ①材料がともに等方性材料の場合
- ②立方晶系材料と六方晶系材料の接合体の場合

# 解析結果 機械荷重問題\_①材料がともに等方性材料の場合

## 異種材接合角部モデル



### 材料定数

	Material 1	Material 2
Young's modulus	0.726	72.6
$E$ (GPa)		
Poisson's ratio	0.3	0.3
$\nu$		

### 漸近解

Williamsの固有値展開法

$$\sigma_{ij}^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi)$$

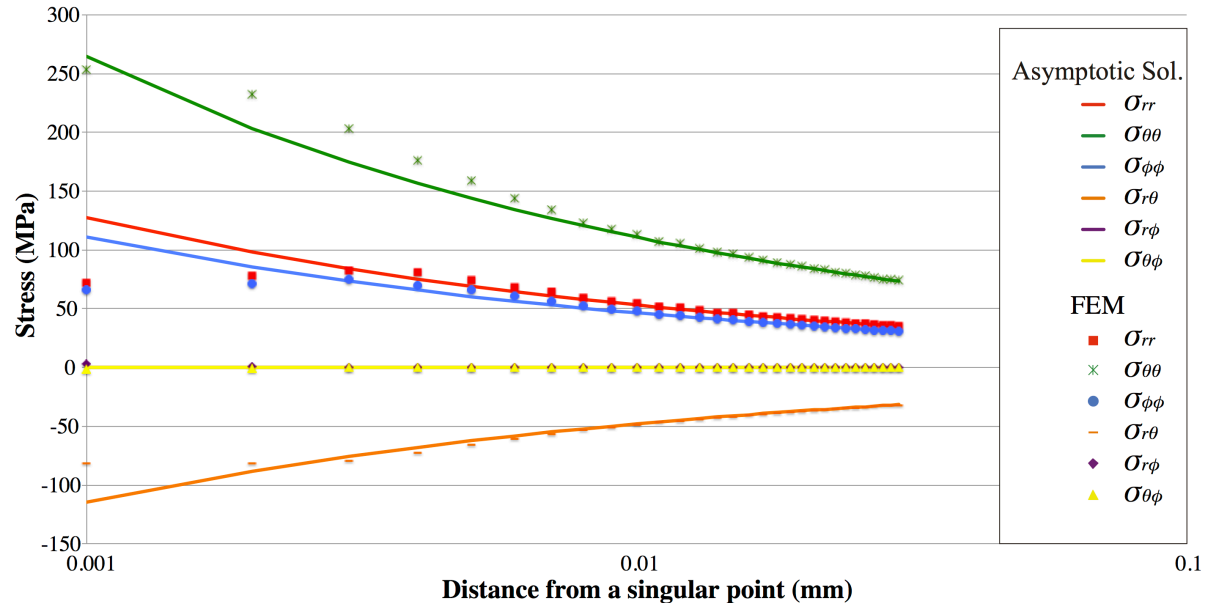
### FEM結果

MSC.Marcにより計算

## 解析結果 (要素数 = 2000)

Eigenvalues	$\lambda_{III}^*$	$\lambda_{II}^*$	$\lambda_I^*$	$\lambda_I$	$\lambda_{II}$	$\lambda_{III}$
	-1.9983	-1.9969	-1.6198	0.6198	0.9969	0.9983
Scalar parameter	$C_I$		$C_{II}$		$C_{III}$	
	10.7743		-0.0014		2.2217	
Integrated values	$l=I, m=II$	$l=I, m=III$	$l=II, m=I$	$l=II, m=III$	$l=III, m=I$	$l=III, m=II$
	$1.19 \times 10^{-9}$	$1.49 \times 10^{-8}$	$2.25 \times 10^{-9}$	$6.38 \times 10^{-6}$	$5.45 \times 10^{-9}$	$2.39 \times 10^{-6}$

## $\theta = 5\pi/12, \phi = \pi/4$ での漸近解とFEM結果の比較

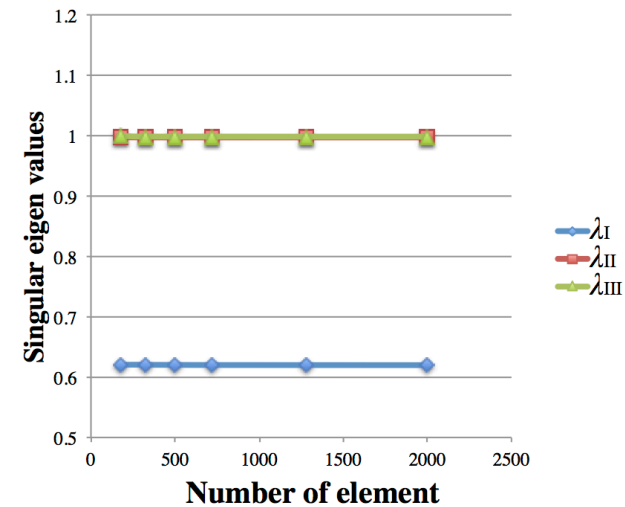




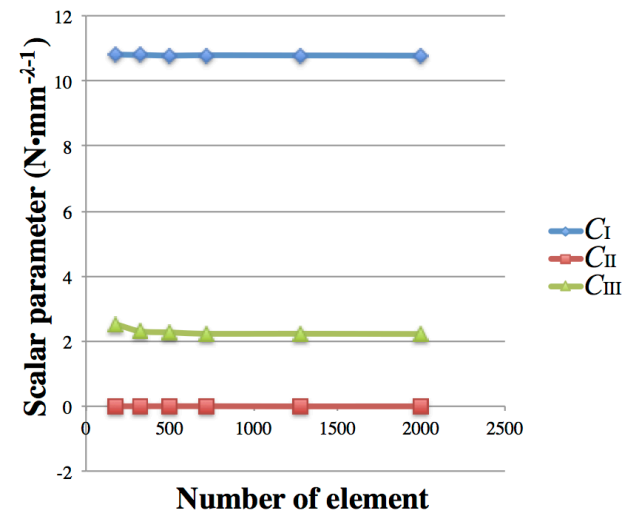
# 解析結果 機械荷重問題\_①材料がともに等方性材料の場合

Elements	Eigenvalues	Scalar parameter
180	$\lambda_I = 0.6209$ $\lambda_{II} = 0.9971$ $\lambda_{III} = 0.9986$	$C_I = 10.799$ $C_{II} = -0.0003$ $C_{III} = 2.5381$
320	$\lambda_I = 0.6204$ $\lambda_{II} = 0.9969$ $\lambda_{III} = 0.9984$	$C_I = 10.796$ $C_{II} = 0.0012$ $C_{III} = 2.3079$
500	$\lambda_I = 0.6202$ $\lambda_{II} = 0.9969$ $\lambda_{III} = 0.9984$	$C_I = 10.777$ $C_{II} = 0.0029$ $C_{III} = 2.2703$
720	$\lambda_I = 0.6200$ $\lambda_{II} = 0.9969$ $\lambda_{III} = 0.9984$	$C_I = 10.787$ $C_{II} = 0.0022$ $C_{III} = 2.2291$
1280	$\lambda_I = 0.6199$ $\lambda_{II} = 0.9969$ $\lambda_{III} = 0.9983$	$C_I = 10.782$ $C_{II} = -0.0021$ $C_{III} = 2.2290$
2000	$\lambda_I = 0.6198$ $\lambda_{II} = 0.9969$ $\lambda_{III} = 0.9983$	$C_I = 10.774$ $C_{II} = -0.0014$ $C_{III} = 2.2217$

## 要素数と特異性固有値の関係



## 要素数とスカラーパラメーターの関係

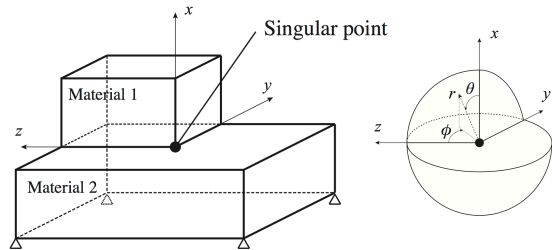


## 節点変位の正規化

$$\frac{\int |g_i^{mk}(\theta, \phi)|^2 dS}{\int \gamma dS} = 1 \quad \rightarrow \gamma = 0.001$$

# 解析結果 機械荷重問題\_②直交異方性材料と単斜晶系材料の接合体の場合

## 異種材接合角部モデル



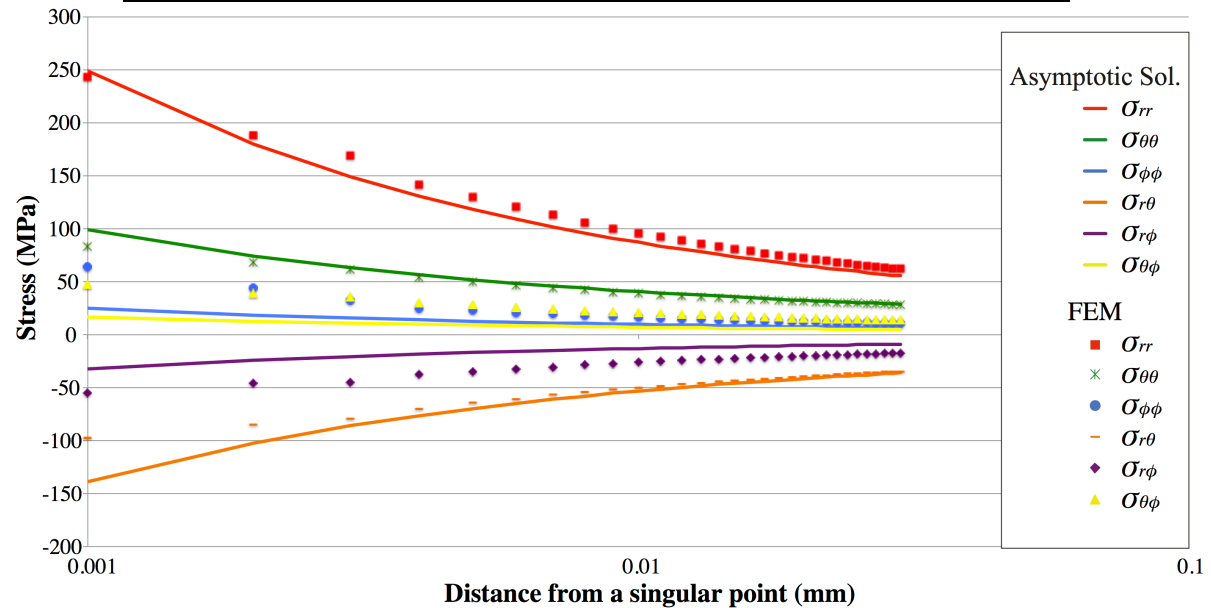
## 材料定数

	Material 1 (Aragonite)	Material 2 (GSO)
$C_{11}$ (GPa)	160	223
$C_{12}$ (GPa)	36.6	108
$C_{13}$ (GPa)	1.97	98.5
$C_{15}$ (GPa)	0	8.4
$C_{22}$ (GPa)	87	150
$C_{23}$ (GPa)	15.9	102
$C_{25}$ (GPa)	0	33.3
$C_{33}$ (GPa)	85	251
$C_{35}$ (GPa)	0	-6
$C_{44}$ (GPa)	41.3	78.8
$C_{46}$ (GPa)	0	6.6
$C_{55}$ (GPa)	25.6	68.8
$C_{66}$ (GPa)	42.7	82.7

## 解析結果 (要素数 = 2000)

Eigenvalues	$\lambda_{III}^*$	$\lambda_{II}^*$	$\lambda_I^*$	$\lambda_I$	$\lambda_{II}$	$\lambda_{III}$
	-1.9275	-1.8385	-1.4879	0.4879	0.8385	0.9275
Scalar parameter	$C_I$		$C_{II}$		$C_{III}$	
	0.0463		-0.1024		0.5272	
Integrated values	$l = I, m = II$	$l = I, m = III$	$l = II, m = I$	$l = II, m = III$	$l = III, m = I$	$l = III, m = II$
	$6.55 \times 10^{-7}$	$1.30 \times 10^{-7}$	$3.34 \times 10^{-7}$	$7.88 \times 10^{-7}$	$7.66 \times 10^{-7}$	$4.00 \times 10^{-7}$

## $\theta = \pi/4, \phi = \pi/4$ での漸近解とFEM結果の比較



# 解析結果

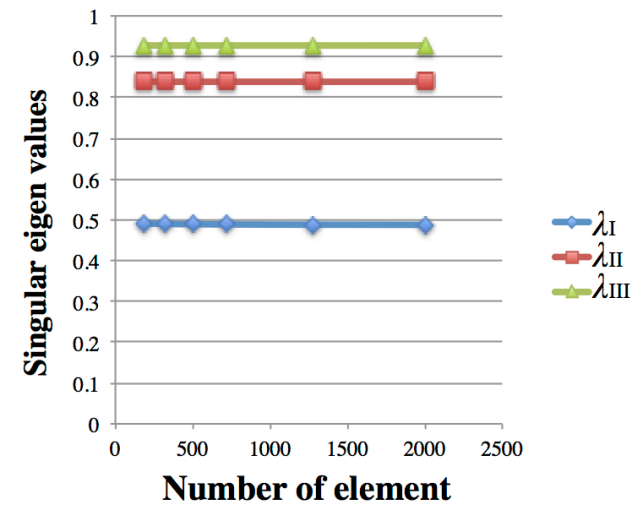
機械荷重問題\_②直交異方性材料と単斜晶系材料の接合体の場合

Elements	Eigenvalues	Scalar parameter
180	$\lambda_I = 0.4915$ $\lambda_{II} = 0.8386$ $\lambda_{III} = 0.9276$	$C_I = 0.0468$ $C_{II} = -0.1010$ $C_{III} = 0.5266$
320	$\lambda_I = 0.4901$ $\lambda_{II} = 0.8385$ $\lambda_{III} = 0.9275$	$C_I = 0.0466$ $C_{II} = -0.1012$ $C_{III} = 0.5256$
500	$\lambda_I = 0.4893$ $\lambda_{II} = 0.8385$ $\lambda_{III} = 0.9274$	$C_I = 0.0465$ $C_{II} = -0.1011$ $C_{III} = 0.5271$
720	$\lambda_I = 0.4888$ $\lambda_{II} = 0.8385$ $\lambda_{III} = 0.9274$	$C_I = 0.0465$ $C_{II} = -0.1016$ $C_{III} = 0.5252$
1280	$\lambda_I = 0.4882$ $\lambda_{II} = 0.8385$ $\lambda_{III} = 0.9274$	$C_I = 0.0464$ $C_{II} = -0.1022$ $C_{III} = 0.5272$
2000	$\lambda_I = 0.4879$ $\lambda_{II} = 0.8385$ $\lambda_{III} = 0.9275$	$C_I = 0.0463$ $C_{II} = -0.1024$ $C_{III} = 0.5272$

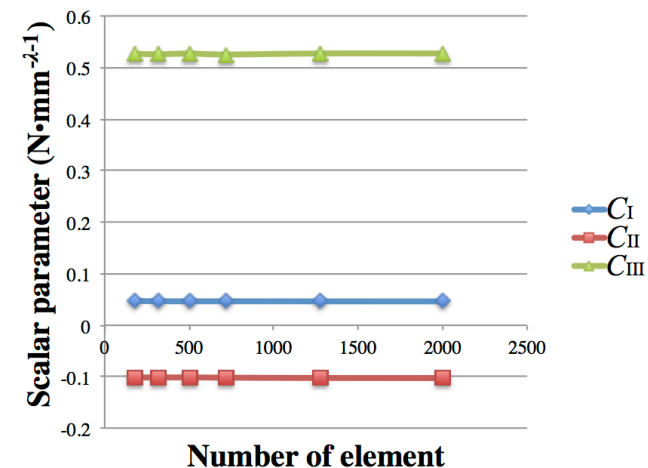
## 節点変位の正規化

$$\frac{\int |g_i^{mk}(\theta, \phi)|^2 dS}{\int \gamma dS} = 1 \quad \rightarrow \gamma = 0.001$$

## 要素数と特異性固有値の関係

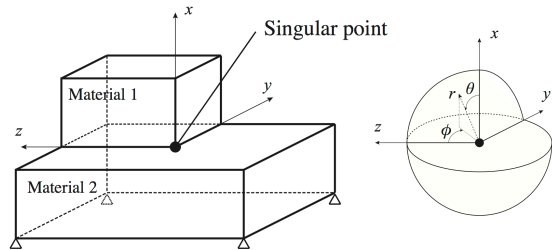


## 要素数とスカラーパラメーターの関係



# 解析結果 熱応力問題\_①材料がともに等方性材料の場合

## 異種材接合角部モデル



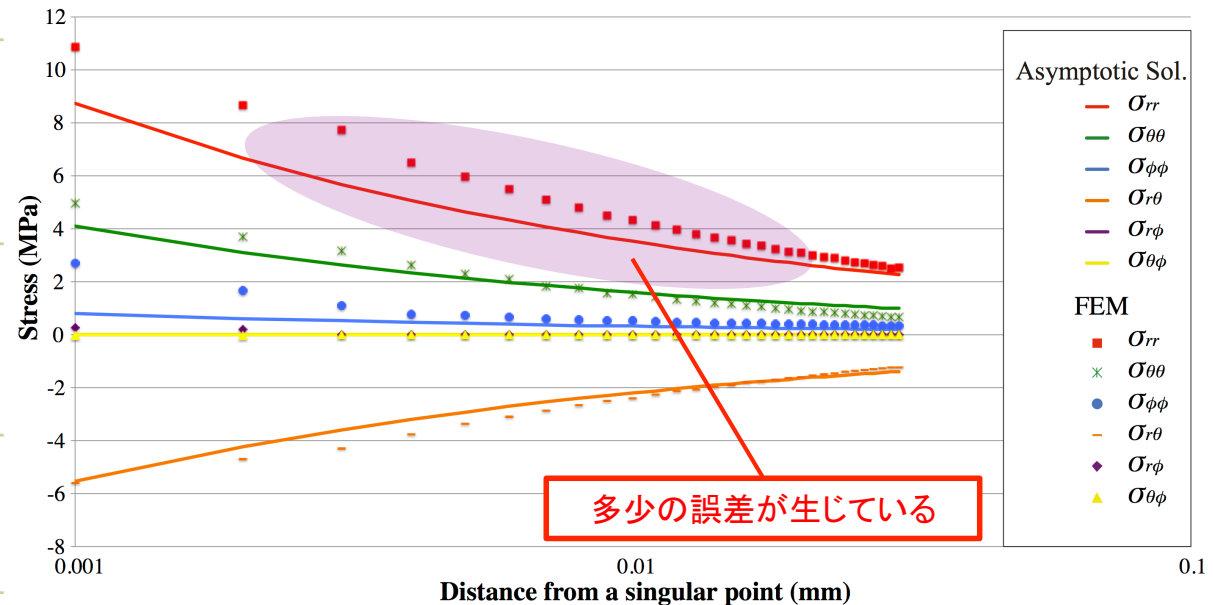
## 解析結果 (要素数 = 2000)

Eigenvalues	$\lambda_{III}^*$	$\lambda_{II}^*$	$\lambda_I^*$	$\lambda_I$	$\lambda_{II}$	$\lambda_{III}$
	-1.9983	-1.9969	-1.6198	0.6198	0.9969	0.9983
Scalar parameter	$C_I$		$C_{II}$		$C_{III}$	
	0.6614		$2.535 \times 10^{-5}$		-1.1798	
Integrated values	$l = I, m = II$	$l = I, m = III$	$l = II, m = I$	$l = II, m = III$	$l = III, m = I$	$l = III, m = II$
	$2.36 \times 10^{-9}$	$6.82 \times 10^{-9}$	$8.94 \times 10^{-10}$	$1.02 \times 10^{-6}$	$1.12 \times 10^{-9}$	$5.70 \times 10^{-6}$

## 材料定数

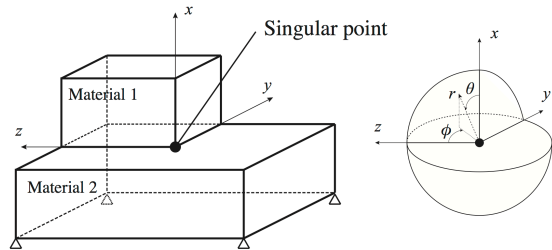
	Material 1	Material 2
Young's modulus	0.726	72.6
$E$ (GPa)		
Poisson's ratio	0.3	0.3
$\nu$		
CTE.	1.0	10.0
$\alpha (\times 10^{-6}/^\circ\text{C})$		

## $\theta = \pi/4, \phi = \pi/4$ での漸近解とFEM結果の比較



# 解析結果 熱応力問題\_②立方晶系材料と六方晶系材料の接合体の場合

## 異種材接合角部モデル



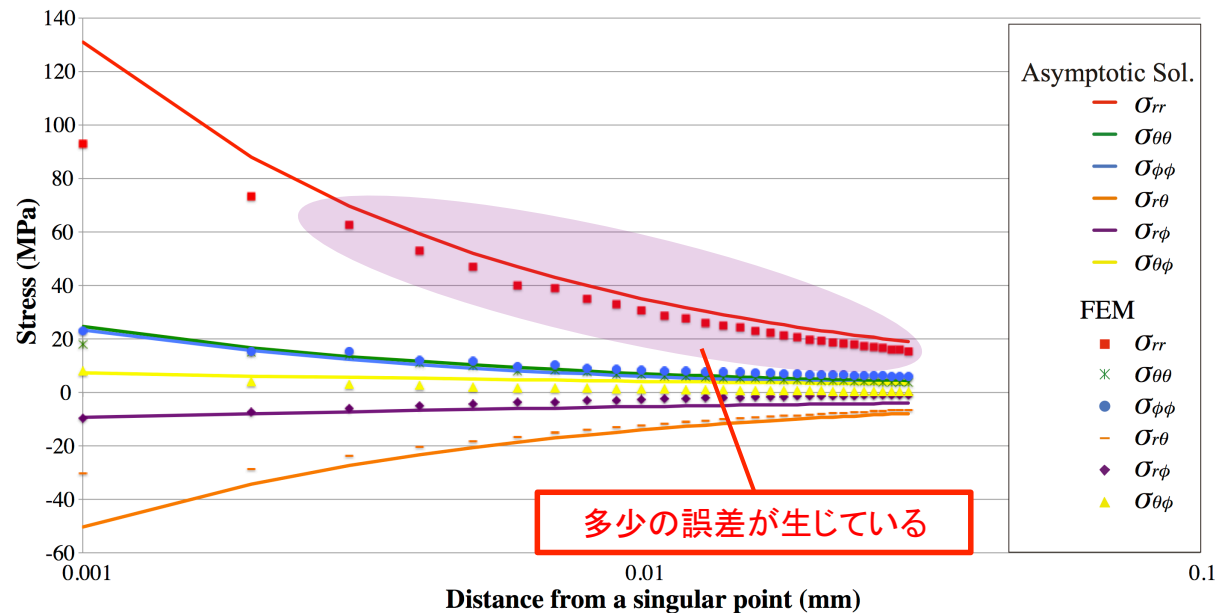
## 材料定数

	Material 1 (Si)	Material 2 (ZnO)
$C_{11}$ (GPa)	165.7	209.6
$C_{12}$ (GPa)	63.9	104.6
$C_{13}$ (GPa)	63.9	120.5
$C_{22}$ (GPa)	165.7	210.6
$C_{23}$ (GPa)	63.9	104.6
$C_{33}$ (GPa)	165.7	209.6
$C_{44}$ (GPa)	79.56	42.3
$C_{55}$ (GPa)	79.56	44.55
$C_{66}$ (GPa)	79.56	42.3
$\alpha_{11}(\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})$	2.55	4.0
$\alpha_{22}(\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})$	2.55	2.1
$\alpha_{33}(\times 10^{-6}/^{\circ}\text{C})$	2.55	4.0

## 解析結果 (要素数 = 2000)

Eigenvalues	$\lambda_{III}^*$	$\lambda_{II}^*$	$\lambda_I^*$	$\lambda_I$	$\lambda_{II}$	$\lambda_{III}$
	-1.8379	-1.7311	-1.4211	0.4211	0.7311	0.8379
Scalar parameter	$C_I$		$C_{II}$		$C_{III}$	
	0.0384		0.0863		-0.0567	
Integrated values	$l = I, m = II$	$l = I, m = III$	$l = II, m = I$	$l = II, m = III$	$l = III, m = I$	$l = III, m = II$
	$1.35 \times 10^{-8}$	$1.27 \times 10^{-6}$	$8.43 \times 10^{-9}$	$2.48 \times 10^{-7}$	$1.46 \times 10^{-7}$	$1.50 \times 10^{-7}$

## $\theta = 3\pi/4, \phi = 5\pi/4$ での漸近解とFEM結果の比較



# 解析結果 熱応力問題\_漸近解と有限要素法解析結果の比較

## 漸近解

Williamsの  
固有値展開法

熱応力項を無視していた

$$\sigma_{ij}^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi)$$



$$\sigma_{ij}^k = \sum_{m=1}^N C_m r^{\lambda_m - 1} f_{ij}^{mk}(\theta, \phi) + \sigma_{ij0}^k$$

熱応力に起因する定常項

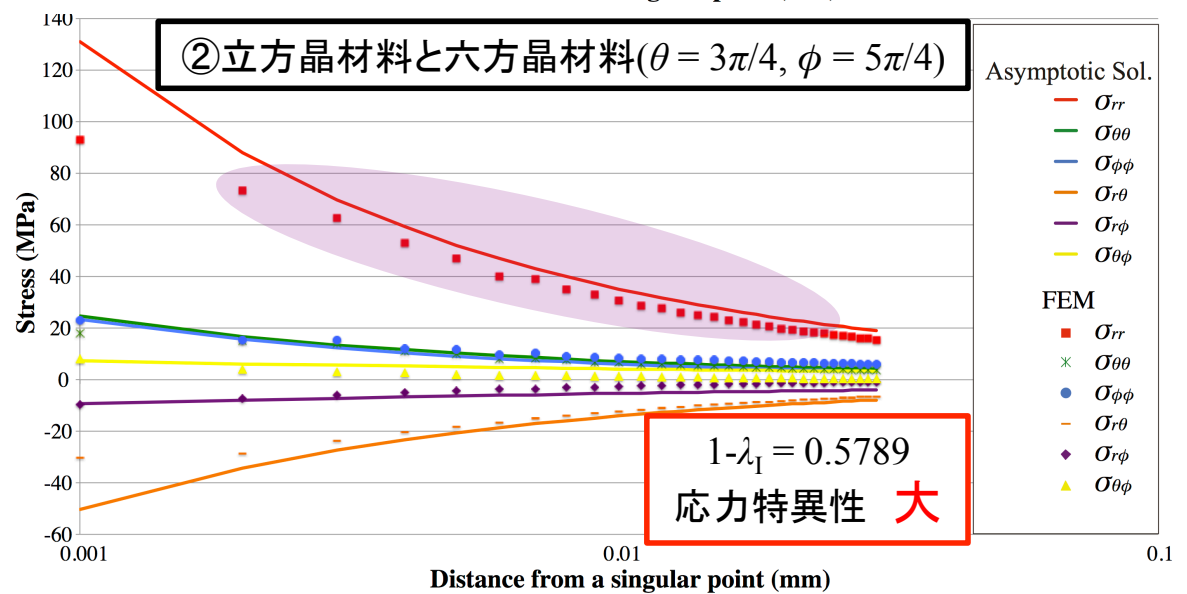
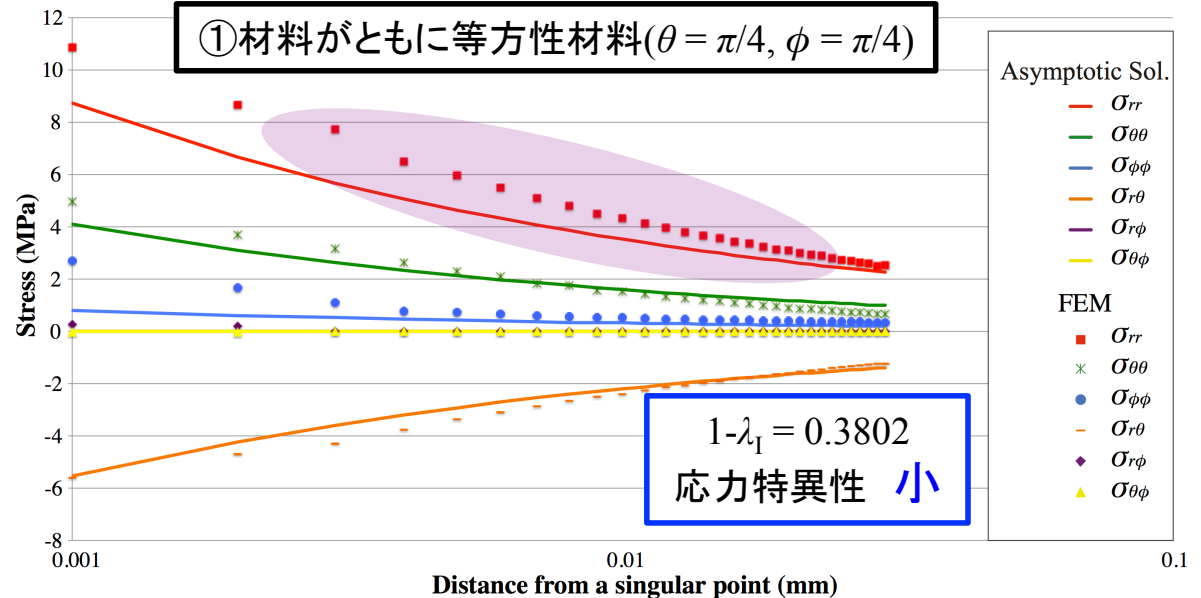
熱による定常項は  
小さいため無視

しかし、多少の誤差が生じている



定常項の影響を無視できて  
いないのではないかと

応力特異性が小さい場合に、  
より差が見られる



# 本発表の流れ

---

- 研究背景・目的
- 解析理論
- 解析条件・結果
- **結言**

# 結言

---

- 計算により得た特異性固有値とスカラーパラメーターによって、接合角部の応力場を求めた。
- $H$ -integralに用いる補助解として、 $-\lambda-1$ を採用しスカラーパラメーターを求めた。固有値が単一の場合だけでなく複数次存在する場合についても、 $H$ -integralがスカラーパラメーターと等しくなることを確認した。
- これまでスカラーパラメーターは固有値解析の有限要素数を増やすことで変化していたが、固有ベクトルを正規化することにより、一義的にスカラーパラメーターの計算を行うことを可能にした。
- Body force analogyを用いた改良により、熱応力問題でもスカラーパラメーターを求めた。漸近解とFEM結果に多少の差が見られたが、異種材接合角部で特に問題となる、熱応力によるはく離現象を定量的に扱うことが可能となった。
- 今後の展望として、スカラーパラメーターでは強度評価基準としては不適當であるため、応力拡大係数の定義を提案する。



---

ご清聴ありがとうございました